capítulo

1

Introducción

RESUMEN DEL CAPÍTULO

1.1 Elementos y limitaciones de los sistemas de comunicación

Información, mensajes y señales Elementos de un sistema de comunicación Limitaciones fundamentales

1.2 Modulación y codificación

Métodos de modulación Beneficios y aplicaciones de la modulación Métodos y beneficios de la codificación

1.3 Perspectiva histórica e impacto social

Perspectiva histórica Impacto social

1.4 Prospecto

"Attention, the Universe! By kingdoms, right wheel!" (¡Atención, Universo! ¡Tus reinos han echado a andar!) Esta frase profética es el primer mensaje telegráfico conocido. Samuel F. B. Morse lo envió por una línea de 16 km en 1838. De este modo nació una nueva era: la de la comunicación eléctrica.

Ahora, siglo y medio después, la ingeniería de comunicaciones ha avanzado a tal grado que los televidentes en la Tierra pueden ver a los astronautas trabajar en el espacio. El teléfono, la radio y la televisión son parte integral de la vida moderna. Los circuitos de larga distancia cubren el globo transportando texto, datos de voz e imágenes. Las computadoras se comunican con otras computadoras por medio de redes intercontinentales y controlan prácticamente cualquier aparato eléctrico en nuestros hogares. Los dispositivos inalámbricos de comunicación personal nos conectan a dondequiera que vayamos. Desde los días de Morse se han realizado grandes progresos y, sin duda, las décadas venideras traerán muchos nuevos avances en la ingeniería de las comunicaciones.

Este texto es una introducción a los sistemas de comunicación eléctricos, incluidos métodos de análisis, principios de diseño y consideraciones de hardware. Para empezar, se hace una descripción global que establece una perspectiva de los capítulos que siguen.

1.1 ELEMENTOS Y LIMITACIONES DE LOS SISTEMAS DE COMUNICACIÓN

Un sistema de comunicación transporta información desde su fuente hasta un destino situado a cierta distancia. Existen tantas aplicaciones diferentes de los sistemas de comunicación que no se puede intentar cubrir todos los tipos, ni discutir con detalle todas las partes individuales que conforman un sistema específico. Un sistema convencional incluye numerosos componentes que cubren todas las posibilidades de la ingeniería eléctrica: circuitos, electrónica, electromagnetismo, procesamiento de señales, microprocesadores y redes de comunicación, por mencionar sólo algunos de los campos relevantes. Un tratamiento parte por parte ocultaría el punto esencial de que un sistema de comunicación es un todo integrado que realmente excede la suma de sus partes.

Por tanto, el tema se enfocará desde un punto de vista más general. Reconociendo que todos los sistemas de comunicación tienen la misma función básica de **transferencia de información**, se elegirán y se aislarán los principios y los problemas relativos al transporte de información en forma eléctrica. Tales problemas se examinarán con suficiente profundidad a fin de desarrollar métodos de análisis y diseño adecuados a una amplia gama de aplicaciones. En resumen, este texto se ocupa de los sistemas de comunicación en tanto **sistemas**.

Información, mensajes y señales

El concepto de **información** es, desde luego, vital para la comunicación; sin embargo, la palabra *información* conlleva nociones semánticas y filosóficas que desafían una definición precisa. Estas dificultades se evitarán tratando más bien con el **mensaje**, definido como la manifestación física de la información tal como la produce la fuente. Cualquiera que sea la forma que tome el mensaje, el objetivo de un sistema de comunicación es reproducir en el destino una réplica aceptable del mensaje de la fuente.

Existen muchas clases de fuentes de información —máquinas y personas, por ejemplo— y los mensajes aparecen en varias formas. No obstante, es posible identificar dos categorías de mensajes distintas: **analógicas** y **digitales**. Esta distinción determina, a su vez, el criterio para una comunicación exitosa.

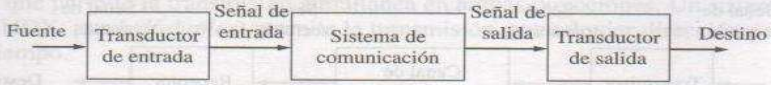


Figura 1.1-1 Sistema de comunicación con transductores de entrada y salida.

Un mensaje **analógico** es una cantidad física que varía con el tiempo, normalmente en forma suave y continua. Ejemplos de mensajes analógicos son la presión acústica producida cuando se habla, la posición angular de un giroscopio en un aeroplano o la intensidad de la luz en algún punto de una imagen de televisión. Puesto que la información es inherente a la forma de onda que varía con el tiempo, un sistema de comunicación analógico debe entregar esta forma de onda con un grado de **fidelidad** especificado.

Un mensaje **digital** es una secuencia ordenada de símbolos elegidos a partir de un conjunto finito de elementos discretos. Algunos ejemplos de mensajes digitales son las letras impresas en esta página, una lista de lecturas de la temperatura cada hora o las teclas que se presionan en un teclado de computadora. Como la información es inherente a símbolos discretos, un sistema de comunicación digital debe entregar estos símbolos con un grado de **precisión** especificado en una cantidad de tiempo determinada.

Ya sean analógicas o digitales, pocas fuentes de mensajes son eléctricas por naturaleza. En consecuencia, la mayoría de los sistemas de comunicación tienen **transductores** de entrada y de salida, como se muestra en la figura 1.1-1. El transductor de entrada convierte el mensaje en una **señal** eléctrica (un voltaje o una corriente) y otro transductor que se encuentra en el punto de destino convierte la señal de salida en la forma deseada del mensaje. Por ejemplo, los transductores en un sistema de comunicación de voz podrían ser un micrófono en la entrada y una bocina en la salida. De aquí en adelante, se supondrá que existen transductores adecuados y se pondrá atención básicamente en la tarea de **transmisión de señales**. En este contexto, los términos **señal** y **mensaje** se usarán de forma indistinta, ya que tanto la señal como el mensaje son manifestaciones físicas de la información.

Elementos de un sistema de comunicación

La figura 1.1-2 muestra los elementos de un sistema de comunicación; en él se omiten los transductores, pero se incluyen contaminaciones indeseadas. Hay tres partes esenciales en todo sistema de comunicación: el transmisor, el canal de transmisión y el receptor, y cada parte desempeña un papel particular en la transmisión de señales en la forma siguiente.

El **transmisor** procesa la señal de entrada para producir una señal transmitida adaptada a las características del canal de transmisión. El procesamiento de señales para la transmisión comprende casi siempre la **modulación** y también puede incluir la **codificación**.

El **canal de transmisión** es el medio eléctrico que forma un puente entre la fuente y el destino. Puede ser un par de alambres, un cable coaxial, una onda de radio o un haz láser. Todo canal introduce alguna cantidad de **pérdida** o **atenuación** en la transmisión, de manera que la potencia de la señal disminuye progresivamente conforme aumenta la distancia.

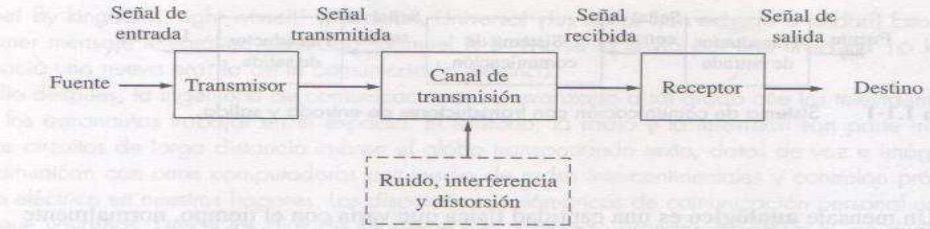


Figura 1.1-2 Elementos de un sistema de comunicación.

El **receptor** opera sobre la señal de salida del canal en preparación para la entrega al transductor en el destino. Las operaciones del receptor incluyen la **amplificación** —para compensar pérdidas en la transmisión—, así como la **demodulación** y **decodificación** —a fin de invertir el procesamiento de la señal ejecutada en el transmisor—. El **filtrado** es otra función importante en el receptor, por razones que se discutirán a continuación.

Durante la transmisión de la señal surgen algunos efectos indeseados; la atenuación es indeseable ya que reduce la **intensidad** de la señal en el receptor. Sin embargo son más serios la distorsión, la interferencia y el ruido, que aparecen como alteraciones de la **forma** de la señal. Aunque estas contaminaciones pueden ocurrir en cualquier punto, por costumbre se le atribuyen completamente al canal, tratando al transmisor y receptor como si fueran ideales. La figura 1.1-2 refleja esta convención.

La **distorsión** es la perturbación de la forma de la onda ocasionada por una respuesta imperfecta del sistema a la propia señal deseada. A diferencia del ruido y la interferencia, la distorsión desaparece cuando la señal no está presente. Si el canal tiene una respuesta lineal pero que distorsiona, entonces la distorsión puede corregirse, o al menos reducirse, con la ayuda de filtros especiales denominados **compensadores**.

La **interferencia** es la contaminación por señales extrañas proveniente de fuentes humanas: otros transmisores, líneas de potencia y maquinaria de potencia, circuitos de conmutación, etc. La interferencia ocurre con más frecuencia en sistemas de radio cuyas antenas receptoras usualmente interceptan varias señales al mismo tiempo. La interferencia de radiofrecuencia (IRF) aparece también en sistemas de cable si los alambres de transmisión o los circuitos del receptor captan las señales radiadas por fuentes cercanas. Un filtrado apropiado elimina la interferencia hasta el punto en el que las señales interferentes ocupan bandas de frecuencia diferentes de la señal deseada.

El **ruido** se refiere a señales eléctricas aleatorias e impredecibles producidas por procesos naturales tanto internos como externos al sistema. Cuando esas variaciones aleatorias se superponen en una señal portadora de información, el mensaje puede ser parcialmente corrompido o totalmente borrado. El filtrado reduce la contaminación del ruido, pero inevitablemente permanece cierta cantidad de ruido que no es posible eliminar. Este ruido constituye una de las limitaciones fundamentales del sistema.

Finalmente, se debe señalar que la figura 1.1-2 representa la transmisión de una vía o **símplex** (SX). La comunicación de dos vías requiere, por supuesto, un transmisor y un receptor en cada extremo. Un sistema **dúplex completo** (FDX, por *full-duplex*) tiene

un canal que permite la transmisión simultánea en ambas direcciones. Un sistema **semidúplex** (HDX, por *half-duplex*) permite la transmisión en cualquier dirección pero no al mismo tiempo.

Limitaciones fundamentales

Los ingenieros enfrentan dos tipos generales de restricciones cuando diseñan un sistema de comunicación. Por un lado están los **problemas tecnológicos**, lo que comprende consideraciones tan diversas como la disponibilidad de hardware, factores económicos, regulaciones gubernamentales, etc. Éstos son problemas de factibilidad que teóricamente se pueden resolver, aunque las soluciones perfectas pueden no ser prácticas. Por otro lado están las **limitaciones físicas fundamentales**: las leyes naturales relacionadas con la tarea en cuestión. Estas limitaciones dictan de manera definitiva lo que se puede o no llevar a cabo, independientemente de los problemas tecnológicos. Las limitaciones fundamentales de la transmisión de información por medios eléctricos son el **ancho de banda** y el **ruido**.

El concepto de ancho de banda se aplica a señales y sistemas como una medida de **velocidad**. Cuando una señal cambia rápidamente con el tiempo, su contenido de frecuencia, o **espectro**, se extiende sobre una amplia gama y se dice que la señal tiene un ancho de banda grande. Análogamente, la habilidad de un sistema para seguir las variaciones de una señal se refleja en su respuesta en frecuencia utilizable o **ancho de banda de transmisión**. Ahora bien, todos los sistemas eléctricos contienen elementos que almacenan energía y no es posible cambiar instantáneamente la energía almacenada. En consecuencia, todo sistema de comunicación tiene un ancho de banda finito B que limita la tasa de variaciones de la señal.

La comunicación en condiciones de tiempo real requiere un ancho de banda de transmisión suficiente para acomodar el espectro de la señal; de lo contrario, habrá distorsión severa. Por ejemplo, se necesita un ancho de banda de varios megahertz para una señal de video de TV, mientras que las variaciones de voz mucho más lentas caben en un ancho de banda $B \approx 3$ kHz. Para una señal digital con r símbolos por segundo, el ancho de banda debe ser $B \geq r/2$. En el caso de transmisión de información sin una restricción de tiempo real, el ancho de banda disponible determina la máxima velocidad de la señal. El tiempo requerido para transmitir una cantidad de información dada es, por tanto, inversamente proporcional a B.

El ruido impone una segunda limitación a la transmisión de información. ¿Por qué es inevitable el ruido? Curiosamente, la respuesta viene de la teoría cinética. A cualquier temperatura superior al cero absoluto, la energía térmica hace que las microscópicas exhiban un movimiento aleatorio. El movimiento aleatorio de partículas cargadas —los electrones, por ejemplo— genera corrientes o voltajes aleatorios denominados **ruido térmico**. Existen otros tipos de ruido, pero el ruido térmico aparece en todo sistema de comunicación.

El ruido se mide con respecto a una señal de información en términos de la **relación de potencias señal a ruido** S/N. La potencia del ruido térmico es por lo regular bastante pequeña y la S/N puede ser tan grande que el ruido no se note. No obstante, para valores más bajos de S/N, el ruido degrada la fidelidad en la comunicación analógica y produce errores en la comunicación digital. Estos problemas se tornan más severos en enlaces de larga distancia cuando la pérdida de transmisión reduce la potencia de la señal recibida hasta el nivel del ruido. La amplificación en el receptor no es de ayuda, porque el ruido se amplificará también con la señal.

Tomando en cuenta ambas limitaciones, Shannon (1948)† formuló que la tasa de transmisión de información no puede exceder la **capacidad del canal**:

$$C = B \log (1 + S/N)$$

Esta relación, conocida como **ley de Hartley-Shannon**, establece un límite superior para el rendimiento de un sistema de comunicación con un ancho de banda y una relación señal-ruido dados.

1.2 MODULACIÓN Y CODIFICACIÓN

La modulación y la codificación son operaciones realizadas en el transmisor para obtener una transmisión de información eficiente y confiable. Estas operaciones son tan importantes que merecen aquí una consideración adicional. Posteriormente, se dedicarán varios capítulos a las técnicas de modulación y codificación.

Métodos de modulación

La modulación comprende dos formas de onda: una **señal moduladora** que representa el mensaje, y una **onda portadora** que satisface la aplicación particular. Un modulador altera sistemáticamente la onda portadora en correspondencia con las variaciones de la señal moduladora. Por ello, la onda modulada resultante "lleva" la información del mensaje. Generalmente, se requiere que la modulación sea una operación *reversible*, de modo que el mensaje se recupere por medio del proceso complementario de **demodulación**.

La figura 1.2-1 muestra una porción de una señal moduladora analógica (parte *a*) y la correspondiente forma de onda modulada obtenida al variar la amplitud de una onda portadora **senoidal** (parte *b*). Ésta es la conocida modulación de amplitud (AM, por *amplitude modulation*) usada para la radiodifusión y otras aplicaciones. Un mensaje también se puede montar sobre una portadora senoidal mediante modulación de frecuencia (FM, por *frecuency modulation*) o modulación de fase (PM, por *phase modulation*). Todos los métodos para modulación de portadora senoidal se agrupan bajo el título de modulación de **onda continua** (OC).

De hecho, siempre que una persona habla actúa como un modulador de OC. La transmisión de la voz por el aire se realiza mediante la generación de tonos portadores en las cuerdas vocales y modulando estos tonos con acciones musculares de la cavidad oral. Así, lo que el oído oye como voz es una onda acústica modulada semejante a una señal AM.

La mayoría de los sistemas de transmisión a larga distancia emplean modulación de OC con una frecuencia de la portadora mucho más alta que la componente de frecuencia más alta de la señal moduladora. El espectro de la señal modulada consta entonces de una banda de componentes de frecuencias agrupados alrededor de la frecuencia de la portadora. En estas condiciones, se dice que la modulación de OC produce **traslación de frecuencia**. En la radiodifusión AM, por ejemplo, el espectro del mensaje normalmente cubre de 100 Hz a 5 kHz; si la frecuencia de la portadora es de 600 kHz, entonces el espectro de la portadora modulada cubre 595-605 kHz.

† Las referencias se indican de esta manera a lo largo del texto. Al final del libro, en el apartado de Referencias, aparecen ordenadas alfabéticamente por autor.

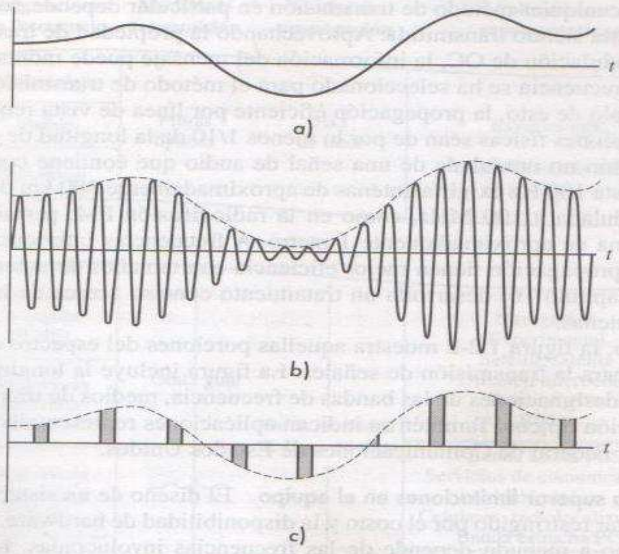


Figura 1.2-1 *a)* Señal moduladora; *b)* portadora senoidal con modulación de amplitud; *c)* portadora de tren de pulsos con modulación de amplitud.

Otro método de modulación, llamado **modulación de pulsos**, tiene un tren periódico de pulsos cortos como la onda portadora. La figura 1.2-1*c* muestra una forma de onda con modulación de amplitud de pulsos (PAM, por *pulse amplitude modulation*). Observe que esta onda PAM está formada por muestras cortas extraídas de la señal analógica en la parte superior de la figura. El **muestreo** es una técnica importante de procesamiento de señales y, sujeta a ciertas condiciones, es posible **reconstruir** una forma de onda completa a partir de muestras periódicas.

Sin embargo, la modulación de pulsos por sí misma no produce la traslación de frecuencia necesaria para una transmisión eficiente de señales. Por ello, algunos transmisores combinan la modulación de pulsos y la de OC. Otras técnicas de modulación, descritas más adelante, combinan la modulación de pulsos con la **codificación**.

Beneficios y aplicaciones de la modulación

El objetivo principal de la modulación en un sistema de comunicación es generar una señal modulada adecuada a las características del canal de transmisión. En realidad, existen varios beneficios y aplicaciones prácticas de la modulación que se expondrán brevemente a continuación.

Modulación para transmisión eficiente La transmisión de señales a distancias apreciables comprende siempre una onda electromagnética viajera, con un medio guía o sin él.

derivado de la ley de Hartley-Shannon. Observe que se puede necesitar una mayor frecuencia de la portadora para acomodar la modulación de banda ancha.

Modulación para asignación de frecuencia Cuando se sintoniza el radio o la televisión en una estación en particular, se está seleccionando una de las muchas señales que se reciben al mismo tiempo. Como cada estación tiene asignada una frecuencia portadora distinta, la señal deseada puede ser separada de las demás por medio del filtrado. Si no fuera por la modulación, sólo una estación podría transmitir en un área determinada; de lo contrario, dos o más estaciones transmisoras crearían irremediablemente una mezcla de interferencias.

Modulación para multiplexaje El multiplexaje (*multiplexing* en inglés) es el proceso de combinar varias señales para la transmisión simultánea por un canal. El **multiplexaje por división de frecuencia** (FDM, por *frecuency division multiplexing*) usa la modulación de OC para colocar cada señal en una frecuencia de la portadora diferente y un banco de filtros separa las señales en el destino. El **multiplexaje por división de tiempo** (TDM, por *time division multiplexing*) usa la modulación de pulsos para colocar muestras de diferentes señales en intervalos de tiempo que no se traslapan. Por ejemplo, en la figura 1.2-1*c*, los espacios entre pulsos podrían llenarse con muestras de otras señales. Un circuito de conmutación en el destino separa así las muestras para reconstrucción de la señal. Algunas aplicaciones del multiplexaje incluyen la radiodifusión estereofónica en FM, TV por cable y telefonía de larga distancia.

Una variación del multiplexaje es el **acceso múltiple** (MA, por *multiple access*). Mientras que el multiplexaje comprende una asignación fija del recurso de comunicación común (como el espectro de frecuencias) en el nivel local, MA supone compartir de manera remota el recurso. Por ejemplo, el acceso múltiple por división de código (CDMA, por *code-division multiple access*) asigna un código único a cada usuario de un celular digital, y las transmisiones individuales se separan mediante la correlación entre los códigos de los usuarios en la transmisión y recepción. Ya que el CDMA permite a diferentes usuarios compartir la misma banda de frecuencias simultáneamente, este código proporciona otra forma de aumentar la eficiencia de la comunicación.

Métodos y beneficios de la codificación

La modulación se ha descrito como una operación de procesamiento de la *señal* para una transmisión efectiva. La **codificación** es una operación de procesamiento de *símbolos* para mejorar la comunicación cuando la información es digital o puede aproximarse por medio de símbolos discretos. Tanto la codificación como la modulación pueden ser necesarias para una transmisión digital confiable a larga distancia.

La operación de **codificación** transforma un mensaje digital en una nueva secuencia de símbolos. La **decodificación** convierte una secuencia codificada en el mensaje original con, quizá, algunos errores producidos por contaminaciones en la transmisión. Considere una computadora u otra fuente digital que tiene $M \gg 2$ símbolos. La transmisión no codificada de un mensaje de esta fuente requeriría M formas de onda diferentes, una para cada símbolo; o bien, cada símbolo podría representarse mediante una **palabra de código binaria** consistente en K dígitos binarios. Puesto que hay 2^K palabras de código posibles formadas por K dígitos binarios, se necesita $K \geq \log_2 M$ dígitos por palabra de código para codificar M símbolos de la fuente. Si la fuente produce r símbolos por se-

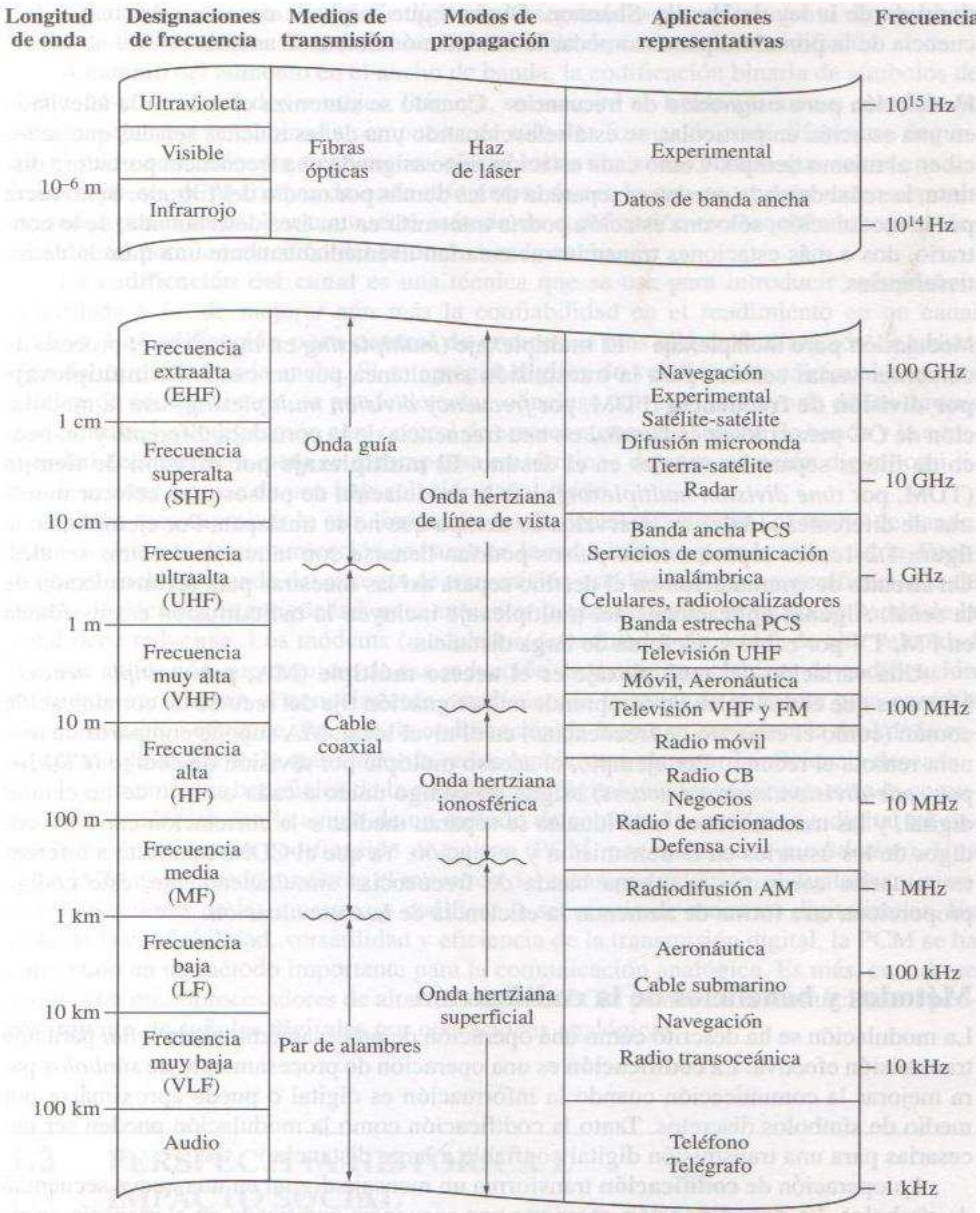


Figura 1.2-2 El espectro electromagnético.

derivado de la ley de Hartley-Shannon. Observe que se puede necesitar una mayor frecuencia de la portadora para acomodar la modulación de banda ancha.

Modulación para asignación de frecuencia Cuando se sintoniza el radio o la televisión en una estación en particular, se está seleccionando una de las muchas señales que se reciben al mismo tiempo. Como cada estación tiene asignada una frecuencia portadora distinta, la señal deseada puede ser separada de las demás por medio del filtrado. Si no fuera por la modulación, sólo una estación podría transmitir en un área determinada; de lo contrario, dos o más estaciones transmisoras crearían irremediablemente una mezcla de interferencias.

Modulación para multiplexaje El multiplexaje (*multiplexing* en inglés) es el proceso de combinar varias señales para la transmisión simultánea por un canal. El **multiplexaje por división de frecuencia** (FDM, por *frecuency division multiplexing*) usa la modulación de OC para colocar cada señal en una frecuencia de la portadora diferente y un banco de filtros separa las señales en el destino. El **multiplexaje por división de tiempo** (TDM, por *time division multiplexing*) usa la modulación de pulsos para colocar muestras de diferentes señales en intervalos de tiempo que no se traslapan. Por ejemplo, en la figura 1.2-1*c*, los espacios entre pulsos podrían llenarse con muestras de otras señales. Un circuito de conmutación en el destino separa así las muestras para reconstrucción de la señal. Algunas aplicaciones del multiplexaje incluyen la radiodifusión estereofónica en FM, TV por cable y telefonía de larga distancia.

Una variación del multiplexaje es el **acceso múltiple** (MA, por *multiple access*). Mientras que el multiplexaje comprende una asignación fija del recurso de comunicación común (como el espectro de frecuencias) en el nivel local, MA supone compartir de manera remota el recurso. Por ejemplo, el acceso múltiple por división de código (CDMA, por *code-division multiple access*) asigna un código único a cada usuario de un celular digital, y las transmisiones individuales se separan mediante la correlación entre los códigos de los usuarios en la transmisión y recepción. Ya que el CDMA permite a diferentes usuarios compartir la misma banda de frecuencias simultáneamente, este código proporciona otra forma de aumentar la eficiencia de la comunicación.

Métodos y beneficios de la codificación

La modulación se ha descrito como una operación de procesamiento de la *señal* para una transmisión efectiva. La **codificación** es una operación de procesamiento de *símbolos* para mejorar la comunicación cuando la información es digital o puede aproximarse por medio de símbolos discretos. Tanto la codificación como la modulación pueden ser necesarias para una transmisión digital confiable a larga distancia.

La operación de **codificación** transforma un mensaje digital en una nueva secuencia de símbolos. La **decodificación** convierte una secuencia codificada en el mensaje original con, quizá, algunos errores producidos por contaminaciones en la transmisión. Considere una computadora u otra fuente digital que tiene $M \gg 2$ símbolos. La transmisión no codificada de un mensaje de esta fuente requeriría M formas de onda diferentes, una para cada símbolo; o bien, cada símbolo podría representarse mediante una **palabra de código binaria** consistente en K dígitos binarios. Puesto que hay 2^K palabras de código posibles formadas por K dígitos binarios, se necesita $K \geq \log_2 M$ dígitos por palabra de código para codificar M símbolos de la fuente. Si la fuente produce r símbolos por se-

gundo, el código binario tendrá Kr dígitos por segundo y el requerimiento de ancho de banda de transmisión es K veces el ancho de banda de una señal no codificada.

A cambio del aumento en el ancho de banda, la codificación binaria de símbolos de fuente M-arias ofrece dos ventajas. Primera, se necesita un hardware menos complicado para manejar una señal binaria compuesta de sólo dos formas de onda diferentes. Segunda, el ruido contaminante tiene menos efecto sobre una señal binaria que sobre una señal compuesta de M formas de onda diferentes, de modo que se tendrán menos errores causados por el ruido. Por tanto, este método de codificación es esencialmente una técnica digital para la reducción del ruido de banda ancha.

La **codificación del canal** es una técnica que se usa para introducir redundancia controlada a fin de mejorar aún más la confiabilidad en el rendimiento en un canal ruidoso. La **codificación para control de errores** va más allá en la dirección de reducción del ruido de banda ancha. Si se agregan **dígitos de verificación** adicionales a cada palabra de código binaria, se puede detectar, o incluso corregir, la mayoría de los errores que ocurran. La codificación para control de errores aumenta el ancho de banda y la complejidad del hardware, pero se recompensa en términos de comunicación digital casi libre de errores a pesar de una baja relación señal-ruido.

Ahora toca examinar la otra limitación fundamental del sistema: el ancho de banda. Muchos sistemas de comunicación se basan en la red telefónica para la transmisión. Puesto que el ancho de banda del sistema de transmisión está limitado por especificaciones de diseño de décadas de antigüedad, para aumentar la tasa de datos, el ancho de banda de la señal debe reducirse. Los módems (*mo*dulador/*demo*dulador de datos) de alta velocidad son una aplicación que requiere de esa reducción de datos. Las técnicas de **codificación de fuente** aprovechan el conocimiento estadístico de la señal de la fuente para permitir una codificación eficiente. Por ello, la codificación de fuente se considera la dual de la codificación del canal en la que *reduce* la redundancia para alcanzar la eficiencia deseada.

Finalmente, los beneficios de la codificación digital pueden incorporarse a la comunicación *analógica* con la ayuda de un método de conversión analógico a digital tal como la modulación por codificación de pulsos (PCM, por *pulse-code-modulation*). Una señal PCM es generada mediante el muestreo del mensaje analógico, al digitalizar (cuantizar) los valores de las muestras y codificar la secuencia de muestras digitalizadas. En vista de la confiabilidad, versatilidad y eficiencia de la transmisión digital, la PCM se ha convertido en un método importante para la comunicación analógica. Es más, cuando se acopla con microprocesadores de alta velocidad, la PCM posibilita la sustitución del **procesamiento de señales digitales** por operaciones analógicas.

1.3 PERSPECTIVA HISTÓRICA E IMPACTO SOCIAL

En nuestra vida diaria, vemos como algo natural la presencia de poderosas tecnologías que nos permiten comunicarnos, casi instantáneamente, con personas alrededor del mundo. Muchos de nosotros ahora tenemos números telefónicos múltiples para manejar nuestro hogar y teléfonos para negocios, faxes, módems y dispositivos personales de comunicación inalámbricos. Enviamos texto, video y música a través de correo electrónico y "navegamos en la red" en busca de información y entretenimiento. Tenemos más estaciones de televisión que las que podemos ver y una "electrónica inteligente" permite a

nuestros aparatos en el hogar mantenernos informados sobre su salud. Es difícil creer que la mayoría de estas tecnologías se han desarrollado en los últimos 50 años.

Perspectiva histórica

La organización de este texto obedece a consideraciones pedagógicas y no refleja necesariamente la evolución de los sistemas de comunicación. Para dar por lo menos una perspectiva histórica, en la tabla 1.3-1 se presenta un bosquejo cronológico de la comunicación eléctrica. La tabla presenta una lista de los inventos clave, los descubrimientos científicos, los artículos importantes y los nombres asociados a estos eventos.

Tabla 1.3-1 Cronología de la comunicación eléctrica

Año	Evento
1800-1837	*Desarrollos preliminares* Volta descubre la primera batería; tratados matemáticos de Fourier, Cauchy y Laplace; experimentos sobre electricidad y magnetismo por Oersted, Ampère, Faraday y Henry; ley de Ohm (1826); primeros sistemas de telegrafía por Gauss, Weber y Wheatstone.
1838-1866	*Telegrafía* Morse perfecciona el sistema; Steinheil descubre que la Tierra puede usarse como una trayectoria de corriente; se inicia el servicio comercial (1844); se diseñan técnicas de multiplexaje; William Thomson (lord Kelvin) calcula la respuesta de un pulso de una línea telegráfica (1855); Cyrus Field y socios instalaron cables trasatlánticos.
1845	Se enuncian las leyes de Kirchhoff.
1864	Las ecuaciones de Maxwell predicen la radiación electromagnética.
1876-1899	*Telefonía* Alexander Graham Bell perfecciona el transductor acústico, después de intentos preliminares hechos por Reis; primera central telefónica, en New Haven, con ocho líneas (1878); transductor de carbón de Edison; se introducen circuitos de cables; Strowger diseña la conmutación automática paso a paso (1887); teoría de cargas en cables por Heaviside, Pupin y Campbell.
1887-1907	*Telegrafía inalámbrica* Heinrich Hertz verifica la teoría de Maxwell; demostraciones por Marconi y Popov; Marconi patenta un sistema de telegrafía completamente inalámbrico (1897); sir Oliver Lodge desarrolla la teoría de circuitos de sintonización; comienza el servicio comercial, incluyendo sistemas barco-a-costa y trasatlánticos.
1892-1899	Publicaciones de Oliver Heaviside sobre cálculo operacional, circuitos y electromagnetismo.
1904-1920	*Electrónica de comunicaciones* Lee De Forest inventa el audión (triodo) basado en el diodo de Fleming; G. A. Campbell y otros diseñan tipos de filtros básicos; experimentos con radiodifusión AM; línea telefónica transcontinental con repetidores electrónicos completada por el Bell System (1915); se introduce la telefonía con portadora multiplexada; E. H. Armstrong perfecciona el receptor de radio superheterodino (1918); primera estación de radiodifusión comercial, KDKA, Pittsburgh.
1920-1928	*Teoría de transmisión* Artículos clave sobre la teoría de transmisión de señales y ruido por J. R. Carson, H. Nyquist, J. B. Johnson y R. V. L. Hartley.
1923-1938	*Televisión* Sistema mecánico de formación de imágenes demostrado por Baird y Jenkins; análisis teórico de los requerimientos de ancho de banda; Farnsworth y Zworykin proponen sistemas electrónicos; tubos de rayos catódicos perfeccionados por DuMont y otros; pruebas de campo y comienza la transmisión experimental.
1927	Se establece la Comisión Federal de Comunicaciones (FCC, por *Federal Communications Commission*).

Tabla 1.3-1 Cronología de la comunicación eléctrica *(continúa)*

Año	Evento
1931	Se inician los servicios de máquinas de escribir a distancia (teletipos).
1934	H. S. Black desarrolla el amplificador de realimentación negativa.
1936	Artículo de Armstrong expone el caso para la radio FM.
1937	Alec Reeves concibe la modulación por codificación de pulsos.
1938-1945	*Segunda Guerra Mundial* Se desarrollan los sistemas de radar y microondas; se usa la FM extensivamente para comunicaciones militares; se mejoran la electrónica, el hardware y la teoría en todas las áreas.
1944-1947	*Teoría estadística de la comunicación* Rice desarrolla una representación matemática del ruido; Wiener, Kolmogoroff y Kotel'nikov aplican métodos estadísticos a la detección de señales.
1948-1950	*Teoría y codificación de la información* C. E. Shannon publica artículos fundamentales de la teoría de la información; Gamming y Golay diseñan códigos correctores de errores.
1948-1951	Bardeen, Brattain y Shockley inventan los dispositivos transistorizados.
1950	Se aplica a la telefonía el multiplexaje por división de tiempo.
1953	Se establecen estándares para la TV a color en los Estados Unidos.
1955	J. R. Pierce propone sistemas de comunicación satelitales.
1956	Primer cable telefónico transoceánico (36 canales de voz).
1958	Sistema de transmisión de datos a larga distancia desarrollado para propósitos militares.
1960	Maiman demuestra el primer láser.
1961	Comienza la producción comercial de circuitos integrados; comienza la radiodifusión de FM estéreo en los Estados Unidos.
1962	Comienza la comunicación por satélite con Telstar I.
1962-1966	*Comunicación digital de alta velocidad* Se ofrece comercialmente el servicio de transmisión de datos; se introduce servicio telefónico de toque-tono; canales de banda ancha diseñados para señalización digital; la modulación por codificación de pulsos demuestra su viabilidad para transmisión de voz y TV; avances importantes en la teoría e implementación de transmisión digital, incluyendo métodos de codificación para control de errores propuestos por Viterbi y otros y el desarrollo de compensación adaptativa por Lucky y colaboradores.
1963	Gunn perfecciona los osciladores de microondas de estado sólido.
1964	Entra en servicio el sistema de conmutación telefónica completamente electrónico (No. 1 ESS).
1965	El Mariner IV transmite imágenes de Marte a la Tierra.
1966-1975	*Sistemas de comunicación de banda ancha* Sistemas de TV por cable; se pone a disposición el servicio de relevo por satélites comerciales; enlaces ópticos usando láser y fibra óptica.
1969	Se crea Arpanet (precursora de Internet).
1971	Intel desarrolla el primer microprocesador de un solo chip.
1972	Motorola desarrolla el teléfono celular; primera transmisión de TV en vivo a través del Atlántico vía satélite.
1980	Disco compacto desarrollado por Philips y Sony.
1981	La FCC adopta reglas para crear el servicio comercial de telefonía celular; se introduce la IBM PC (los discos duros se introducen dos años después).
1982	AT&T llega a un acuerdo para deshacerse de 22 compañías de servicio telefónico local; se forman siete compañías operadoras regionales del sistema Bell.

(continúa)

Tabla 1.3-1 Cronología de la comunicación eléctrica *(continúa)*

Año	Evento
1985	Aparatos de fax ampliamente disponibles en oficinas.
1988-1989	Instalación de cables ópticos transpacífico y trasatlántico para comunicaciones por ondas luminosas.
1990-2000	*Sistemas de comunicación digital* Sistemas de procesamiento de señales y de comunicación digital en aparatos domésticos; receptores sintonizados digitalmente; sistemas de dispersión de espectro por secuencia directa; redes digitales de servicios integrados (ISDN); se desarrollan estándares para la televisión digital de alta definición (HDTV); buscapersonas digitales; computadoras manuales; celulares digitales.
1994-1995	La FCC recauda 7.7 mil millones de dólares en la subasta de espectro de frecuencias para dispositivos personales de comunicación de banda ancha.
1998	Se inicia el servicio de televisión digital en los Estados Unidos.

Varios de los términos en la cronología ya habían sido mencionados, mientras que otros se describirán en capítulos subsecuentes cuando se analicen el impacto y las interrelaciones de acontecimientos específicos. Por tanto, puede ser de utilidad referirse a esta tabla de vez en cuando.

Impacto social

Este planeta se siente un poco más pequeño en gran parte debido a los avances en comunicaciones. Hay múltiples fuentes que proporcionan constantemente las últimas noticias sobre sucesos mundiales, en tanto que los líderes bien informados utilizan esto para crear opiniones en sus propios países y fuera de ellos. Las tecnologías de la comunicación cambian la forma en que se hacen negocios y las compañías que una vez fueron poderosas, incapaces de adaptarse, están desapareciendo. Las industrias de cable y telecomunicaciones se dividen y se unen con una velocidad asombrosa, y las fronteras entre sus tecnologías y las de las compañías de hardware y software se hacen difusas. La gente puede (y espera) estar conectada 24 horas al día, siete días a la semana, lo que significa poder seguir recibiendo correo electrónico, llamadas telefónicas y faxes relacionados con el trabajo, aun cuando esté de vacaciones en la playa o en un área alguna vez considerada remota.

Estos cambios en la tecnología estimulan debates sobre nuevas políticas públicas, principalmente en aspectos de privacidad personal, seguridad de la información y protección de derechos de autor. Los nuevos negocios aprovechan la ventaja de las tecnologías de punta con una rapidez mayor que las leyes y políticas requeridas para regirlos. Con tantos sistemas de computadoras conectadas a Internet, individuos malintencionados son capaces de esparcir rápidamente virus de computadoras alrededor del globo. Los teléfonos celulares están tan extendidos que los teatros y restaurantes han creado reglas para controlar su uso. Por ejemplo, no hace mucho tiempo que, antes de iniciar un espectáculo, se le anunciaba a la gente que no estaba permitido fumar. Ahora algunos teatros les solicitan a los espectadores que apaguen sus celulares y radiolocalizadores. Las leyes estatales, así como las franquicias municipales y las comisiones de servicios públicos, deben ser modificadas para adaptarse a la revolución tecnológica. Y la fuerza de trabajo debe estar al día con los avances en tecnología a través de la educación continua.

Con nuevas tecnologías desarrollándose de manera exponencial, no puede afirmarse con certeza cómo será el mundo dentro de 50 años. No obstante, una base firme en los principios de sistemas de comunicaciones, la creatividad, el compromiso con las aplicaciones éticas de la tecnología y las grandes habilidades en la resolución de problemas equipan al ingeniero de comunicaciones con la capacidad para darle forma a ese futuro.

1.4 PROSPECTO

Este texto proporciona una introducción extensa a las comunicaciones analógica y digital. A cada tema principal que se presenta precede una revisión de material de apoyo relevante. Cada capítulo comienza con un resumen del material cubierto y una lista de los objetivos de aprendizaje. En todo el texto nos apoyamos fuertemente en modelos matemáticos para llegar al corazón de problemas complejos. Sin embargo, hay que tener en mente que tales modelos deben combinarse con un razonamiento físico y con un juicio desde la perspectiva de la ingeniería.

Los capítulos 2 y 3 abordan señales deterministas, recalcando el análisis en los dominios del tiempo y de la frecuencia de la transmisión, distorsión y filtrado de señales. Los capítulos 4 y 5 discuten el *cómo* y el *porqué* de varios tipos de modulación de OC. Algunos temas específicos incluyen señales moduladas, transmisores y ancho de banda de transmisión. En el capítulo 6 se introduce el muestreo y la modulación de pulsos, seguido por sistemas de modulación analógica, incluidos receptores, sistemas de multiplexaje y sistemas de televisión en el capítulo 7. Antes de entrar a una discusión del impacto del ruido en los sistemas de modulación de OC en el capítulo 10, los capítulos 8 y 9 aplican la teoría de la probabilidad y la estadística a la representación de señales aleatorias y ruido.

La comunicación digital comienza en el capítulo 11 con la transmisión en banda base (no modulada), de modo que podamos concentrarnos en los conceptos importantes de señales digitales y espectros, ruido y errores y sincronización. El capítulo 12 utiliza los capítulos previos para el estudio de la modulación por codificación de pulsos, lo cual comprende sistemas PCM y de multiplexaje digital. En el capítulo 13 se presenta un estudio breve de la codificación para control de errores. El capítulo 14 analiza sistemas de transmisión digital con modulación de OC y termina en una comparación del rendimiento de los diferentes métodos. En el capítulo 15 de esta edición se hace una presentación ampliada de los sistemas de espectro disperso. Finalmente, una introducción a la teoría de la información en el capítulo 16 proporciona una visión retrospectiva de la comunicación digital y nos regresa a la ley de Shannon-Hartley.

Cada capítulo contiene varios ejercicios diseñados para aclarar y reforzar los conceptos y las técnicas de análisis. Estos ejercicios deben resolverse cuando se presenten, verificando los resultados con las respuestas al final del libro. También al final se encontrarán tablas que contienen resúmenes de material del texto importante y relaciones matemáticas pertinentes a los ejercicios y a los problemas al final de cada capítulo.

Aunque básicamente se describen los sistemas de comunicación en términos de "cajas negras" con propiedades especificadas, ocasionalmente se les quitará la tapa para mirar los circuitos electrónicos que ejecutan operaciones particulares. Tales digresiones tienen una finalidad ilustrativa, más que enfocarse en un tratamiento extenso de la electrónica de comunicaciones. Aparte de las discusiones sobre electrónica, algunos temas

opcionales o más avanzados se hallan intercalados en varios capítulos y se identifican mediante el símbolo ★. Estos temas pueden omitirse sin que se pierda la continuidad. El apéndice contiene otros materiales opcionales de carácter suplementario.

Se han incluido dos tipos de referencias. Los libros y artículos citados en los capítulos proporcionan información adicional sobre temas específicos. Las referencias adicionales están recopiladas para una lectura complementaria que sirva como una bibliografía para quienes deseen estudiar los temas con mayor profundidad.

Finalmente, como ya debe haberse notado, los ingenieros de comunicaciones usan muchas abreviaturas y acrónimos. La mayoría de las abreviaturas definidas en este libro también se dan en el índice, al cual es posible referirse si se olvida una definición.

capítulo

2

Señales y espectros

RESUMEN DEL CAPÍTULO

2.1 Espectros de líneas y serie de Fourier

Fasores y espectros de línea Señales periódicas y potencia promedio Series de Fourier Condiciones de convergencia y el fenómeno de Gibbs Teorema de potencia de Parseval

2.2 Transformadas de Fourier y espectros continuos

Transformadas de Fourier Señales simétricas y causales Teorema de la energía de Rayleigh Teorema de la dualidad Cálculos de transformadas

2.3 Relaciones de tiempo y frecuencia

Superposición Retardo de tiempo y cambio de escala Traslación y modulación de frecuencia Diferenciación e integración

2.4 Convolución

La integral de convolución Teoremas de convolución

2.5 Impulsos y transformadas en el límite

Propiedades del impulso unitario Impulsos en frecuencia Funciones escalón y signo Impulsos en el tiempo

Las señales eléctricas de comunicaciones son cantidades que varían en el tiempo, al igual que el voltaje y la corriente. Aunque una señal existe físicamente en el dominio del tiempo, también se representa en el **dominio de la frecuencia**, donde se considera que la señal está integrada por componentes senoidales de diferentes frecuencias. A esta descripción en el dominio de la frecuencia se le denomina **espectro**.

El análisis espectral, usando la serie y la transformada de Fourier, es uno de los métodos fundamentales de la ingeniería de comunicaciones. Permite tratar *clases* completas de señales que tienen propiedades similares en el dominio de la frecuencia, en vez de complicarse con un análisis detallado en el dominio del tiempo de señales individuales. Por otra parte, cuando se conjunta con las características de la respuesta de frecuencia de filtros y otros componentes de los sistemas, el enfoque espectral proporciona ideas valiosas para el trabajo de diseño.

Por tanto, este capítulo está dedicado a las señales y al análisis espectral, haciendo hincapié en la interpretación en el dominio de la frecuencia de las propiedades de las señales. Se examinarán los espectros de línea con base en la expansión de series de Fourier de señales periódicas, y los espectros continuos a partir de la transformada de Fourier de señales no periódicas. Estos dos tipos de espectros se fusionarán finalmente con la ayuda del concepto de la función impulso.

Como primer paso en el análisis espectral deben escribirse ecuaciones que representen señales como funciones del tiempo. Pero tales ecuaciones son sólo *modelos* matemáticos del mundo real y, por ende, modelos imperfectos. De hecho, una descripción completamente fidedigna de la señal física más sencilla sería bastante complicada e imprácticа para propósitos de ingeniería. En consecuencia, se tratará de diseñar modelos que representen con complejidad mínima las propiedades significativas de las señales físicas. El estudio de muchos modelos de señales diferentes proporciona el conocimiento necesario para escoger modelos apropiados a aplicaciones específicas. En muchos casos, los modelos sólo serán aplicables a clases particulares de señales. A lo largo de este capítulo, las clasificaciones principales de las señales se destacarán por sus propiedades especiales.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, usted será capaz de hacer lo siguiente:

1. Dibujar e identificar el espectro de línea unilateral o bilateral de una señal conformada por una suma de senoidales (Sec. 2.1).
2. Calcular el valor promedio, la potencia promedio y la energía total de una señal sencilla (Secs. 2.1 y 2.2).
3. Escribir las expresiones para la serie exponencial de Fourier y sus coeficientes, la serie trigonométrica de Fourier y la transformada de Fourier directa e inversa (Secs. 2.1 y 2.2).
4. Identificar las propiedades en el dominio del tiempo de una señal a partir de su representación en el dominio de la frecuencia y viceversa (Sec. 2.2).
5. Dibujar e identificar el espectro de un tren de pulsos rectangulares, de un solo pulso rectangular o de un pulso sinc (Secs. 2.1 y 2.2).
6. Enunciar y aplicar el teorema de potencia de Parseval y el teorema de la energía de Rayleigh (Secs. 2.1 y 2.2).
7. Enunciar los siguientes teoremas de transformadas: superposición, retardo de tiempo, cambio de escala, traslación de frecuencia y modulación, diferenciación e integración (Sec. 2.3).
8. Usar los teoremas de transformadas para hallar y dibujar el espectro de una señal definida por operaciones en el dominio del tiempo (Sec. 2.3).
9. Establecer la integral de convolución y simplificarla tanto como sea posible cuando una de las funciones es un pulso rectangular (Sec. 2.4).
10. Enunciar y aplicar los teoremas de convolución (Sec. 2.4).
11. Evaluar expresiones que contengan impulsos o bien simplificarlas (Sec. 2.5).
12. Determinar el espectro de una señal conformada por constantes, escalones, impulsos, senoidales o funciones rectangulares y triangulares (Sec. 2.5).

2.1 ESPECTROS DE LÍNEAS Y SERIES DE FOURIER

Esta sección incluye e interpreta el dominio de la frecuencia en términos de fasores rotativos. Se comenzará con el espectro de línea de una señal senoidal. Después, se empleará la expansión en serie de Fourier para obtener el espectro de línea de cualquier señal periódica cuya potencia promedio sea finita.

Fasores y espectros de línea

Considérese la conocida forma de onda senoidal o la forma de onda $v(t)$ de CA (corriente alterna) graficada en la figura 2.1-1. Por convención, las senoidales se expresan en términos de la función coseno y se escriben

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad [1]$$

donde A es el valor pico o **amplitud** y ω_0 es la **frecuencia en radianes**. El **ángulo de fase** ϕ representa el hecho de que el pico está desplazado del origen del tiempo y ocurre en $t = -\phi/\omega_0$. La ecuación (1) implica que $v(t)$ se repite a sí misma para todo tiempo con **periodo** de repetición $T_0 = 2\pi/\omega_0$. El inverso del periodo es igual a la **frecuencia cíclica**

$$f_0 \triangleq \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} \qquad [2]$$

medida en ciclos por segundo o hertz.

Desde luego, ninguna señal real tiene una duración eterna, pero la ecuación (1) podría ser un modelo razonable para una forma de onda senoidal que dura un tiempo largo en comparación con su periodo. En particular, el análisis de circuitos en régimen permanente de CA depende de la suposición de una senoidal eterna, normalmente representada por una exponencial compleja o **fasor**. Los fasores también desempeñan un papel principal en el análisis espectral.

La representación fasorial de una señal senoidal proviene del **teorema de Euler**

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta \qquad [3]$$

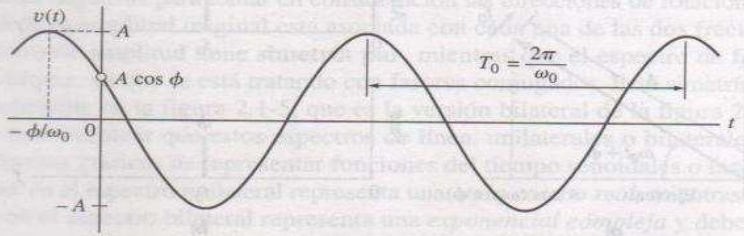


Figura 2.1-1 Una forma de onda senoidal $v(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$.

donde $j \triangleq \sqrt{-1}$ y θ es un ángulo arbitrario. Si se hace $\theta = \omega_0 t + \phi$, puede escribirse cualquier senoidal como la parte real de una exponencial compleja, a saber,

$$A\cos(\omega_0 t + \phi) = A\,\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega_0 t + \phi)}\right] = \mathrm{Re}\left[Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}\right] \qquad [4]$$

A ésta se le llama representación fasorial porque el término entre corchetes puede considerarse un vector que gira en un plano complejo cuyos ejes son las partes real e imaginaria, como lo ilustra la figura 2.1-2*a*. El fasor tiene longitud A, gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con una frecuencia de f_0 revoluciones por segundo y en el instante $t = 0$ forma un ángulo ϕ con respecto al eje real positivo. La proyección del fasor sobre el eje real es igual a la senoidal de la ecuación (4).

Ahora observe que sólo tres parámetros especifican completamente un fasor: la amplitud, el ángulo de fase y la frecuencia de rotación. Para describir el mismo fasor en el **dominio de la frecuencia**, hay que asociar la amplitud y la fase correspondientes con la frecuencia particular f_0. Por tanto, una descripción adecuada en el dominio de la frecuencia sería el **espectro de línea** de la figura 2.1-2*b*, el cual está integrado por dos gráficas: amplitud *versus* frecuencia, y fase *versus* frecuencia. Aunque esta figura parece sencilla, e incluso trivial, tiene un gran valor conceptual cuando se extrapola a señales más complicadas. Pero antes de dar ese paso, se deben asentar cuatro convenciones con respecto a los espectros de línea:

1. En todas las gráficas espectrales la variable independiente será la **frecuencia cíclica** f en hertz, en lugar de la frecuencia en radianes ω, y cualquier frecuencia específica como f_0 se identificará mediante un subíndice (se seguirá usando ω con subíndices o sin ellos como una notación abreviada para $2\pi f$ ya que esa combinación ocurre con mucha frecuencia).
2. Los ángulos de fase se medirán con respecto a ondas **coseno** o, equivalentemente, con respecto al eje real positivo del diagrama fasorial. Por tanto, las ondas seno deben convertirse a cosenos a través de la identidad

$$\operatorname{sen}\omega t = \cos(\omega t - 90°) \qquad [5]$$

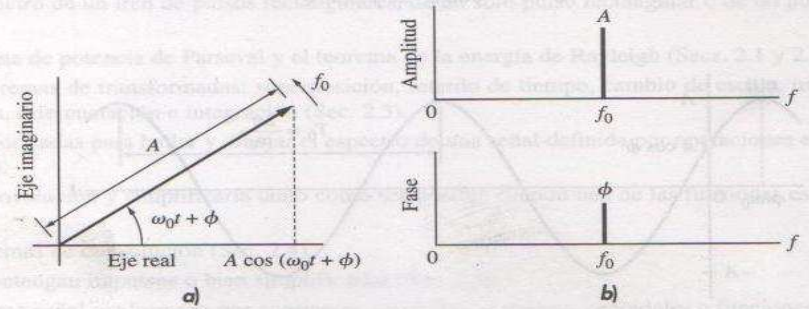


Figura 2.1-2 Representación de $A\cos(\omega_0 t + \phi)$. *a*) Diagrama fasorial; *b*) espectro de línea.

3. La amplitud siempre se considera una cantidad **positiva**. Cuando aparecen signos negativos, éstos deben tomarse en cuenta en la fase usando

$$-A \cos \omega t = A \cos (\omega t \pm 180°) \qquad [6]$$

No importa si se toma $+180°$ o $-180°$, pues el fasor termina en el mismo sitio en cualquiera de las formas.

4. Los ángulos de fase suelen expresarse en grados, aunque otros ángulos —como ωt— están inherentemente en radianes. Esto no debe provocar confusión ya que los ángulos expresados en grados siempre llevarán consigo el símbolo apropiado.

Para ilustrar estas convenciones y trascender la idea del espectro de línea, considere la señal

$$w(t) = 7 - 10 \cos (40\pi t - 60°) + 4 \text{ sen } 120\pi t$$

cuya gráfica está en la figura 2.1-3*a*. Convirtiendo el término constante en una frecuencia cero o componente de CD (corriente directa) y aplicando las ecuaciones (5) y (6) da la suma de cosenos

$$w(t) = 7 \cos 2\pi 0t + 10 \cos (2\pi 20t + 120°) + 4 \cos (2\pi 60t - 90°)$$

cuyo espectro se muestra en la figura 2.1-3*b*.

Gráficas como la de la figura 2.1-3*b*, llamadas espectros de línea **unilaterales** o de frecuencia *positiva,* se construyen para cualquier combinación lineal de senoidales. Sin embargo, otra representación espectral resulta ser más valiosa, aunque involucra frecuencias *negativas.* Esta representación se obtiene a partir de la ecuación (4), recordando que $\text{Re}[z] = \frac{1}{2}(z + z^*)$, donde z es cualquier cantidad compleja con conjugado complejo z^*. Por tanto, si $z = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$, entonces $z^* = Ae^{j\phi}e^{-j\omega_0 t}$ y la ecuación (4) se convierte en

$$A \cos (\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t} \qquad [7]$$

de manera que ahora se tiene un *par de fasores conjugados.*

El diagrama fasorial y el espectro de línea correspondientes se muestran en la figura 2.1-4. El diagrama fasorial está conformado por dos fasores con longitudes iguales, pero ángulos y direcciones de rotación opuestos. La suma fasorial siempre cae en el eje real para producir $A \cos (\omega_0 t + \phi)$. El espectro de línea es **bilateral** ya que debe incluir frecuencias negativas para tomar en consideración las direcciones de rotación opuestas, y la mitad de la amplitud original está asociada con cada una de las dos frecuencias $\pm f_0$. El espectro de amplitud tiene **simetría par**, mientras que el espectro de fase tiene **simetría impar**, ya que se está tratando con fasores conjugados. Esta simetría se observa más claramente en la figura 2.1-5, que es la versión bilateral de la figura 2.1-3*b*.

Se debe recalcar que estos espectros de línea, unilaterales o bilaterales, son solamente formas gráficas de representar funciones del tiempo senoidales o fasoriales. Una sola línea en el espectro unilateral representa una *onda coseno real,* mientras que una sola línea en el espectro bilateral representa una *exponencial compleja* y debe añadirse el término conjugado para obtener una onda coseno real. De este modo, siempre que se hable de algún intervalo de frecuencia como f_1 a f_2 en un espectro bilateral, también debe

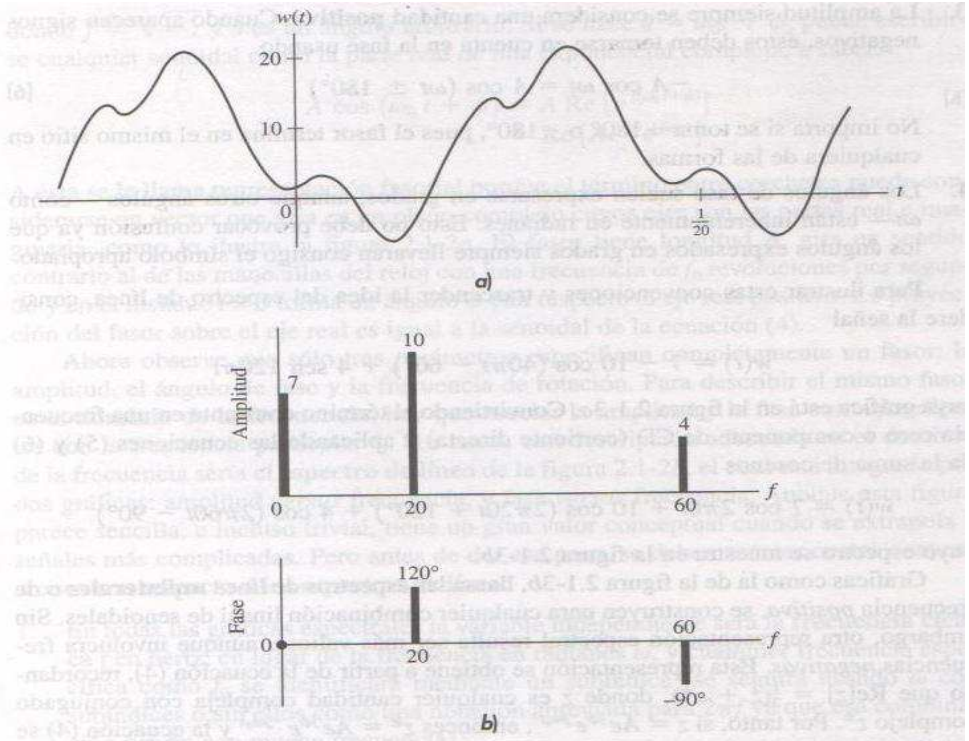


Figura 2.1-3

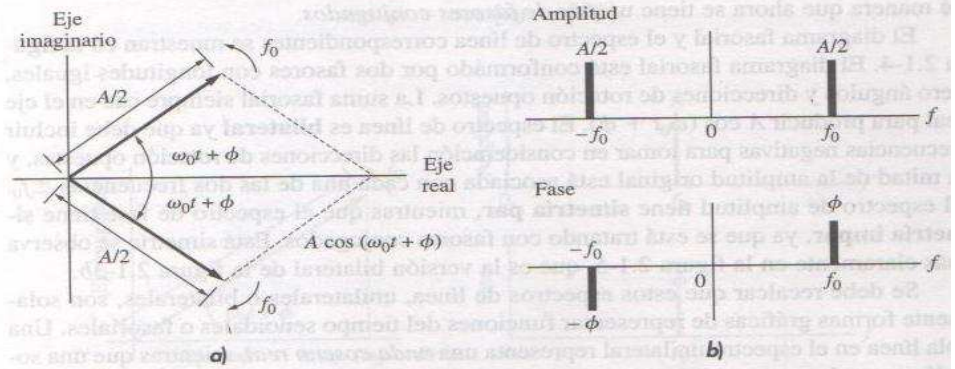


Figura 2.1-4 *a*) Fasores conjugados; *b*) espectro bilateral.

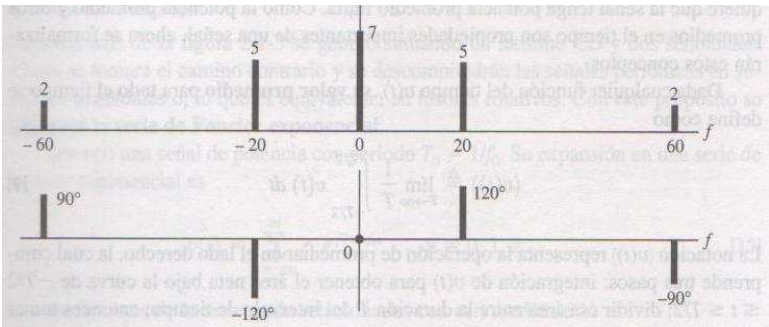


Figura 2.1-5

incluirse el intervalo correspondiente de frecuencias negativas $-f_1$ a $-f_2$. Una notación sencilla para especificar ambos intervalos es $f_1 \leq |f| \leq f_2$.

Finalmente, observe que

El espectro de amplitud en cualquiera de sus dos versiones proporciona más información que el espectro de fase. Se requieren ambas partes para definir la función en el dominio del tiempo, pero el espectro de amplitud dice por sí solo cuáles son las frecuencias que están presentes y en qué proporción.

Dicho de otra forma: el espectro de amplitud muestra el *contenido de frecuencia de la señal.*

Construya el espectro unilateral y el bilateral de $v(t) = -3 - 4 \text{ sen } 30\pi t$. **EJERCICIO 2.1-1**

Señales periódicas y potencia promedio

Las senoidales y los fasores pertenecen a la clase general de *señales periódicas.* Estas señales obedecen la relación

$$v(t \pm mT_0) = v(t) \qquad -\infty < t < \infty \qquad [8]$$

donde m es un entero. Esta ecuación indica simplemente que el desplazamiento de la señal por un número entero de periodos hacia la izquierda o hacia la derecha no altera la forma de la onda. En consecuencia, una señal periódica se describe completamente al especificar su comportamiento en cualquier periodo.

La representación de una señal periódica en el dominio de la frecuencia es un espectro de línea obtenido mediante una expansión en serie de Fourier. La expansión requiere que la señal tenga potencia promedio finita. Como la potencia promedio y otros promedios en el tiempo son propiedades importantes de una señal, ahora se formalizarán estos conceptos.

Dada cualquier función del tiempo $v(t)$, su **valor promedio** para todo el tiempo se define como

$$\langle v(t) \rangle \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} v(t)\, dt \qquad [9]$$

La notación $\langle v(t) \rangle$ representa la operación de promediar en el lado derecho, la cual comprende tres pasos: integración de $v(t)$ para obtener el área neta bajo la curva de $-T/2 \leq t \leq T/2$; dividir esa área entre la duración T del intervalo de tiempo; entonces tomar el límite $T \to \infty$ para cubrir todo el tiempo. En el caso de una señal **periódica**, la ecuación (9) se reduce al promedio en cualquier intervalo de duración T_0; es decir,

$$\langle v(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1 + T_0} v(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, dt \qquad [10]$$

donde el símbolo $\int_{T_0}$ representa una integración desde cualquier tiempo t_1 hasta $t_1 + T_0$.

Si $v(t)$ es el voltaje en una resistencia R, produce la corriente $i(t) = v(t)/R$ y podría calcularse la potencia promedio resultante promediando la potencia instantánea $v(t)i(t) = v^2(t)/R = Ri^2(t)$. Pero no necesariamente uno sabe si una señal dada es un voltaje o una corriente, de modo que hay que **normalizar** la potencia suponiendo de aquí en adelante que $R = 1\ \Omega$. La definición dada aquí de la **potencia promedio** asociada con una señal periódica arbitraria se convierte entonces en

$$P \triangleq \langle |v(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t)|^2\, dt \qquad [11]$$

donde se ha escrito $|v(t)|^2$ en vez de $v^2(t)$ para permitir la posibilidad de modelos de señales *complejas.* En cualquier caso, el valor de P será *real* y *no negativo.*

Cuando la integral de la ecuación (11) existe y da $0 < P < \infty$, se dice que la señal $v(t)$ tiene una potencia promedio bien definida y se llamará *señal de potencia periódica.* Casi todas las señales periódicas de interés práctico caen en esta categoría. El valor promedio de una señal de potencia puede ser positivo, negativo o cero.

Algunos promedios de señales se obtienen por inspección, usando la interpretación física de la operación de promediación. Como ejemplo específico tómese la senoidal

$$v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

la cual tiene

$$\langle v(t) \rangle = 0 \qquad P = \frac{A^2}{2} \qquad [12]$$

No debe haber problemas en confirmar estos resultados si se dibuja un periodo de $v(t)$ y de $|v(t)|^2$.

Series de Fourier

La señal $w(t)$ de la figura 2.1-3 se generó sumando un término CD y dos senoidales. Ahora se tomará el camino contrario y se descompondrán las señales periódicas en sumas de senoidales o, lo que es equivalente, en fasores rotativos. Con este propósito se empleará la **serie de Fourier exponencial**.

Sea $v(t)$ una señal de potencia con periodo $T_0 = 1/f_0$. Su expansión en una serie de Fourier exponencial es

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad [13]$$

Los coeficientes de la serie están relacionados con $v(t)$ mediante

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t}\, dt \qquad [14]$$

de modo que c_n es igual al promedio del producto $v(t)e^{-j2\pi n f_0 t}$. Como en general los coeficientes son cantidades complejas, se expresan en la forma polar

$$c_n = |c_n|\, e^{j \arg c_n}$$

donde arg c_n representa el **ángulo** de c_n. De manera que la ecuación (13) expande una señal de potencia periódica como una suma infinita de fasores, donde el enésimo término es

$$c_n e^{j2\pi n f_0 t} = |c_n|\, e^{j \arg c_n} e^{j2\pi n f_0 t}$$

Las propiedades de convergencia de la serie se analizarán después de considerar sus implicaciones espectrales.

Observe que $v(t)$ en la ecuación (13) está formado por fasores con amplitud $|c_n|$ y ángulo arg c_n en las frecuencias $nf_0 = 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \ldots$. Por tanto, la gráfica correspondiente en el dominio de la frecuencia es un espectro de línea bilateral definido por los coeficientes de la serie. Se hace hincapié en la interpretación espectral escribiendo

$$c(nf_0) \triangleq c_n$$

de modo que $|c(nf_0)|$ representa el **espectro de amplitud** como una función de f, y arg $c(nf_0)$ representa el **espectro de fase**. A continuación se indican tres propiedades espectrales importantes de señales de potencia periódicas:

1. Todas las frecuencias son múltiplos enteros o **armónicos** de la **frecuencia fundamental** $f_0 = 1/T_0$. De modo que las líneas espectrales tienen espaciamiento uniforme f_0.
2. La componente de CD es igual al **valor promedio** de la señal, ya que haciendo $n = 0$ en la ecuación (14) da

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t)\, dt = \langle v(t) \rangle \qquad [15]$$

Los valores calculados de $c(0)$ pueden verificarse por inspección de $v(t)$; una buena práctica cuando la integración da un resultado ambiguo.

3. Si $v(t)$ es una función **real** (no compleja) del tiempo, entonces

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n|\, e^{-j \arg c_n} \qquad [16a]$$

la cual se deduce de la ecuación (14) con $-n$ remplazando a n. Entonces

$$|c(-nf_0)| = |c(nf_0)| \qquad \arg c(-nf_0) = -\arg c(nf_0) \qquad [16b]$$

lo que significa que el espectro de amplitud tiene simetría par y el espectro de fase tiene simetría impar.

Cuando se trabaja con señales reales, la propiedad en la ecuación (16) permite reagrupar la serie exponencial en **pares de complejos conjugados**, excepto por c_0. La ecuación (13) se convierte entonces en

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) \qquad [17]$$

que es la **serie trigonométrica de Fourier** y sugiere un espectro unilateral. Sin embargo, la mayor parte del tiempo se usarán la serie exponencial y los espectros bilaterales.

Antes de presentar un ejemplo, vale la pena hacer un comentario final. La integración para c_n con frecuencia involucra un promedio fasorial en la forma

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f t}\, dt = \frac{1}{j2\pi f T} (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}) \qquad [18]$$

$$= \frac{1}{\pi f T} \operatorname{sen} \pi f T$$

Como esta expresión ocurre repetidamente en el análisis espectral, se introducirá ahora la **función sinc**, definida por

$$\operatorname{sinc} \lambda \triangleq \frac{\operatorname{sen} \pi\lambda}{\pi\lambda} \qquad [19]$$

donde λ representa la variable independiente. Algunos autores usan la **función de muestreo** definida como Sa $(x) \triangleq (\operatorname{sen} x)/x$, de modo que sinc λ = Sa $(\pi\lambda)$. La figura 2.1-6 muestra que sinc λ es una función par de λ con su pico en $\lambda = 0$ y cruces de cero en los demás valores enteros de λ, de suerte que

$$\operatorname{sinc} \lambda = \begin{cases} 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

En la tabla T.4 al final del libro se dan valores numéricos de sinc λ y sinc^2 λ, mientras que la tabla T.3 incluye varias relaciones matemáticas de utilidad en el análisis de Fourier.

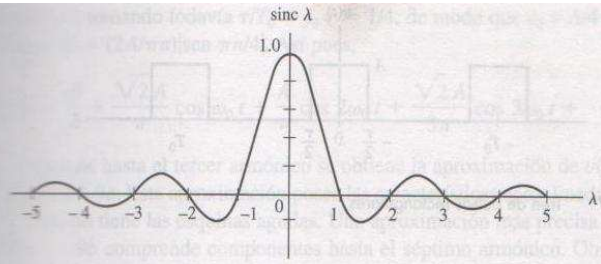


Figura 2.1-6 La función sinc $\lambda = (\text{sen } \pi\lambda)/\pi\lambda$.

Tren de pulsos rectangulares **EJEMPLO 2.1-1**

Considere el tren periódico de pulsos rectangulares de la figura 2.1-7. Cada pulso tiene una altura o amplitud A y una anchura o duración τ. Hay **discontinuidades** escalonadas en cada posición de los bordes del pulso en $t = \pm\tau/2$ y así sucesivamente, de manera que los valores de $v(t)$ *no están definidos* en estos puntos de discontinuidad. Esto hace evidente otra posible diferencia entre una señal física y su modelo matemático, ya que una señal física nunca hace una transición escalonada perfecta. No obstante, el modelo todavía puede ser razonable si los tiempos reales de transición son bastante pequeños en comparación con la duración del pulso.

Para calcular los coeficientes de Fourier, se tomará el intervalo de integración de la ecuación (14) en el periodo central $-T_0/2 \le t \le T_0/2$, donde

$$v(t) = \begin{cases} A & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Entonces

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t)e^{-j2\pi nf_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi nf_0 t}\,dt$$

$$= \frac{A}{-j2\pi nf_0 T_0}\left(e^{-j\pi nf_0\tau} - e^{+j\pi nf_0\tau}\right)$$

$$= \frac{A}{T_0}\frac{\text{sen } \pi nf_0\tau}{\pi nf_0}$$

Multiplicando y dividiendo entre τ da finalmente

$$c_n = \frac{A\tau}{T_0}\,\text{sinc}\, nf_0\tau \qquad [20]$$

la cual se deduce de la ecuación (19) con $\lambda = nf_0\tau$.

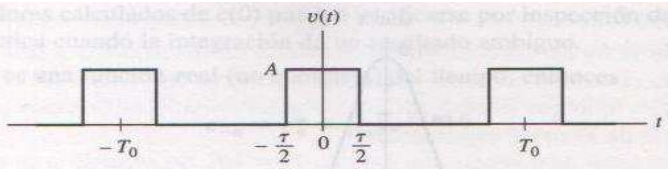


Figura 2.1-7 Tren de pulsos rectangulares.

El espectro de amplitud obtenido a partir de $|c(nf_0)| = |c_n| = Af_0\,\tau|\text{sinc}\, nf_0\,\tau|$ se muestra en la figura 2.1-8*a* para el caso de $\tau/T_0 = f_0\,\tau = 1/4$. Esta gráfica se construye dibujando la función continua $Af_0\,\tau|\text{sinc}\, f\tau|$ como una curva punteada, que se convierte en la **envolvente** de las líneas. Las líneas espectrales en $\pm 4f_0$, $\pm 8f_0$, etc., "no están", pues caen justamente en múltiplos de $1/\tau$, donde la envolvente es igual a cero. La componente de CD tiene amplitud $c(0) = A\tau/T_0$, lo cual debe reconocerse como el valor promedio de $v(t)$ por inspección de la figura 2.1-7. Por cierto, τ/T_0 es igual a la razón entre el tiempo "on" y el periodo, frecuentemente designada como **ciclo de trabajo** en el trabajo de electrónica de pulsos.

El espectro de fase en la figura 2.1-8*b* se obtiene al observar que c_n es siempre real, aunque algunas veces negativa. Por tanto, arg $c(nf_0)$ asume los valores de 0° y ±180°, dependiendo del signo de sinc $nf_0\,\tau$. Aquí se usó +180° y − 180° para resaltar la simetría impar de la fase.

Habiendo descompuesto el tren de pulsos en sus componentes de frecuencia, conviene reconstruirlo de nuevo. Con este propósito, se escribirá la serie trigonométrica en

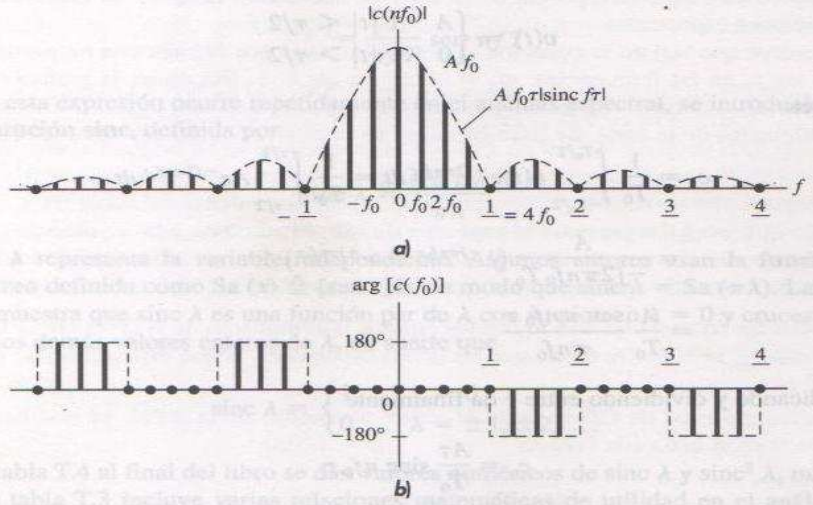


Figura 2.1-8 Espectro del tren de pulsos rectangulares con $f_c\tau = 1/4$. *a*) Amplitud; *b*) fase.

la ecuación (17), tomando todavía $\tau/T_0 = f_0\,\tau = 1/4$, de modo que $c_0 = A/4$ y $|2c_n| = (2A/4)\,|\text{sinc } n/4| = (2A/\pi n)|\text{sen } \pi n/4|$. Así pues,

$$v(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2}\,A}{\pi}\cos\omega_0 t + \frac{A}{\pi}\cos 2\omega_0 t + \frac{\sqrt{2}\,A}{3\pi}\cos 3\omega_0 t + \cdots$$

Al sumar términos hasta el tercer armónico se obtiene la aproximación de $v(t)$ dibujada en la figura 2.1-9*a*. Esta aproximación posee las características aproximadas del tren de pulsos, pero no tiene las esquinas agudas. Una aproximación más precisa mostrada en la figura 2.1-9*b* comprende componentes hasta el séptimo armónico. Observe que los mayores armónicos de menor amplitud sirven principalmente para escuadrar las esquinas. Observe asimismo que la serie está convergiendo hacia el valor en el punto medio $A/2$ en $t = \pm\tau/2$, donde $v(t)$ tiene discontinuidades.

EJERCICIO 2.1-2

Dibújese el espectro de amplitud de un tren de pulsos rectangulares para cada uno de los casos siguientes: $\tau = T_0/5$, $\tau = T_0/2$, $\tau = T_0$. En el último caso el tren de pulsos degenera en una constante para todo el tiempo. ¿Cómo se muestra esto en el espectro?

Condiciones de convergencia y el fenómeno de Gibbs

Se ha visto que una señal periódica puede aproximarse mediante un número finito de términos de su serie de Fourier. Pero ¿**converge** la serie infinita a $v(t)$? El estudio de la convergencia implica consideraciones matemáticas sutiles que no se incluirán aquí. En vez de ello, se enunciarán sin demostración algunos de los resultados importantes. Por otro lado, sobre las condiciones de convergencia se dan detalles en Ziemer, Tranter y Fannin (1998) o bien en Stark, Tuteur y Anderson (1988).

Las **condiciones de Dirichlet** para la expansión en serie de Fourier son las siguientes: si una función periódica $v(t)$ tiene un número finito de máximos, mínimos y discontinuidades por periodo y si $v(t)$ es **absolutamente integrable**, de modo que $v(t)$ tenga un área finita por periodo, entonces la serie de Fourier existe y converge uniformemente dondequiera que $v(t)$ sea continua. Estas condiciones son suficientes, pero no estrictamente necesarias.

Una condición alterna es que $v(t)$ tenga **integrabilidad al cuadrado**, de suerte que $|v(t)|^2$ tenga un área finita por periodo, equivalente a una señal de potencia. Con esta condición, la serie **converge en la media**, de manera que si

$$v_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

entonces

$$\lim_{N\to\infty} \int_{T_0} |v(t) - v_N(t)|^2\,dt = 0$$

En otras palabras, la diferencia media cuadrática entre $v(t)$ y la suma parcial $v_N(t)$ se anula conforme se incluyen más términos.

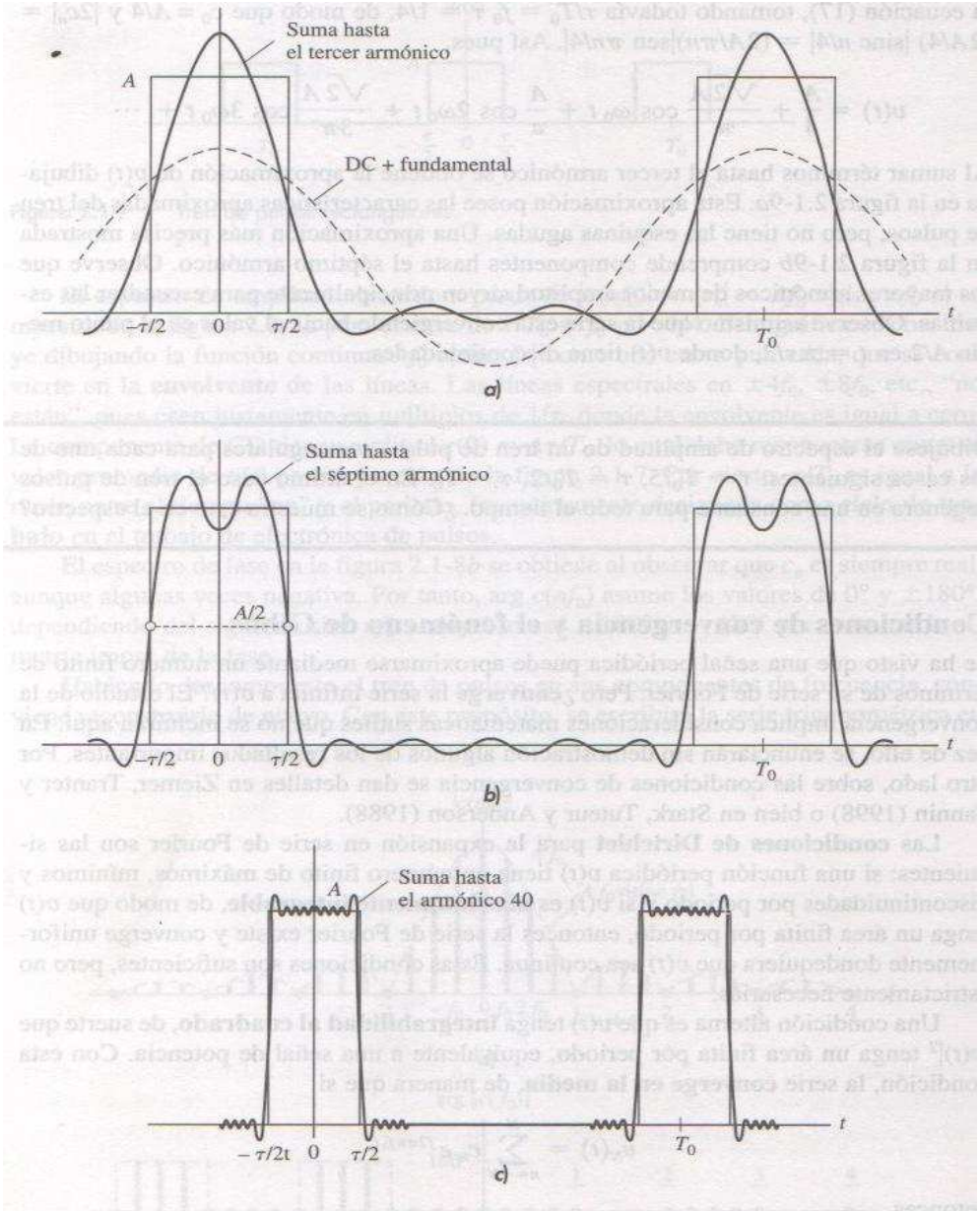


Figura 2.1-9 Reconstrucción por serie de Fourier de un tren de pulsos rectangulares.

Aun cuando $v(t)$ es absolutamente integrable o tiene una integrabilidad al cuadrado, la serie exhibe una conducta conocida como **fenómeno de Gibbs** en puntos de discontinuidad. La figura 2.1-10 ilustra esta conducta para una discontinuidad escalonada en $t = t_0$. La suma parcial $v_N(t)$ converge al **punto medio** de la discontinuidad, lo que parece bastante razonable. Sin embargo, a cada lado de la discontinuidad, $v_N(t)$ tiene un sobreimpulso oscilatorio con periodo $T_0/2N$ y un valor pico de aproximadamente 9 por ciento de la altura del escalón, independiente de N. Así pues, conforme $N \to \infty$, las oscilaciones colapsan en picos que no desaparecen llamados "lóbulos de Gibbs" por encima y por debajo de la discontinuidad, como se muestra en la figura 2.1-9*c*. Kamen y Heck (1997, capítulo 4) ofrecen ejemplos realizados en laboratorio para ilustrar mejor el fenómeno de Gibbs.

Puesto que una señal real debe ser continua, el fenómeno de Gibbs no ocurre y ello justifica tratar la serie de Fourier como si fuese *idéntica* a $v(t)$. Pero los modelos idealizados de señales como el tren de pulsos rectangulares sí suelen tener discontinuidades. En consecuencia, es necesario tener cuidado con la convergencia cuando se trabaja con estos modelos.

El fenómeno de Gibbs también tiene implicaciones para las formas de los filtros usados con señales reales. Un filtro ideal que esté conformado como un pulso rectangular dará por resultado discontinuidades en el espectro, produciendo distorsiones en la señal de tiempo. Otra manera de considerar esto es que la multiplicación de una señal en el dominio de la frecuencia por un filtro rectangular da como resultado la convolución de la señal de tiempo con una función sinc. En consecuencia, las aplicaciones reales usan otras formas de ventanas con mejores características de tiempo-frecuencia, tales como ventanas de Hamming o Hanning. Véase Oppenheim, Schafer y Buck (1999) para una discusión más completa sobre los efectos de las formas de ventanas.

Teorema de potencia de Parseval

El teorema de Parseval relaciona la potencia promedio P de una señal periódica con sus coeficientes de Fourier. Para deducir el teorema, hay que comenzar con

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |v(t)|^2\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)v^*(t)\,dt$$

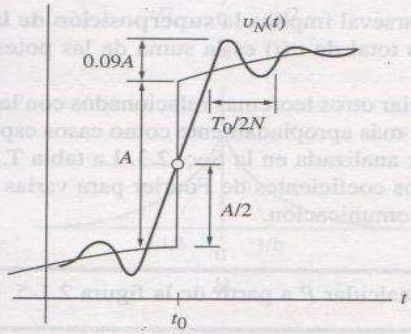


Figura 2.1-10 Fenómeno de Gibbs en una discontinuidad en escalón.

Ahora se remplaza $v^*(t)$ por su serie exponencial

$$v^*(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}\right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}$$

de manera que

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{-j2\pi n f_0 t}\right] dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} v(t)e^{-j2\pi n f_0 t}\,dt\right] c_n^*$$

y la integral dentro de la sumatoria es igual a c_n. Así pues,

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n c_n^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \qquad [21]$$

que es el teorema de Parseval.

La interpretación espectral de este resultado es extremadamente sencilla:

> La potencia promedio se determina elevando al cuadrado y sumando las alturas $|c_n| = |c(nf_0)|$ de las líneas de amplitud.

Obsérvese que la ecuación (21) no involucra el espectro de fase, reforzando el comentario anterior sobre el papel dominante del espectro de amplitud en relación con el contenido de frecuencia de una señal. Para una interpretación adicional de la ecuación (21), recuérdese que la serie de Fourier exponencial expande $v(t)$ como una suma de fasores de la forma $c_n e^{j2\pi n f_0 t}$. Se puede demostrar fácilmente que la potencia promedio de cada fasor es

$$\langle |c_n e^{j2\pi n f_0 t}|^2 \rangle = |c_n|^2 \qquad [22]$$

Por tanto, el teorema de Parseval implica la **superposición de la potencia promedio**, pues la potencia promedio total de $v(t)$ es la suma de las potencias promedio de sus componentes fasoriales.

Aquí se podrían enunciar otros teoremas relacionados con las series de Fourier. Sin embargo, éstos se analizan más apropiadamente como casos especiales de teoremas de la transformada de Fourier analizada en la Sec. 2.3. La tabla T.2 da una lista de algunos resultados junto con los coeficientes de Fourier para varias señales periódicas encontradas en sistemas de comunicación.

EJERCICIO 2.1-3 Use la ecuación (21) para calcular P a partir de la figura 2.1-5.

2.2 TRANSFORMADAS DE FOURIER Y ESPECTROS CONTINUOS

Pasemos ahora del estudio de señales periódicas cuya duración es eterna (en teoría) al análisis de señales no periódicas de duración relativamente corta. Si una señal no periódica tiene energía total finita, su representación en el dominio de la frecuencia será un espectro continuo obtenido a partir de la transformada de Fourier.

Transformadas de Fourier

La figura 2.2-1 muestra dos señales típicas no periódicas. El pulso rectangular único (figura 2.2-1*a*) está **estrictamente limitado en el tiempo** ya que $v(t)$ es igual a cero fuera de la duración del pulso. La otra señal es **asintóticamente limitada en el tiempo** en el sentido de que $v(t) \to 0$ conforme $t \to \pm\infty$. Estas señales también suelen describirse aproximadamente como "pulsos". En cualquier caso, si se intenta promediar $v(t)$ o $|v(t)|^2$ durante todo el tiempo, se encontrará que estos promedios son iguales a cero. En consecuencia, en lugar de hablar acerca de la potencia promedio, una propiedad más significativa de una señal no periódica es su energía.

Si $v(t)$ es el voltaje a través de una resistencia, la energía total suministrada se determinará al integrar la potencia instantánea $v^2(t)/R$. Por tanto, la **energía de la señal** normalizada se define como

$$E \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 \, dt \qquad [1]$$

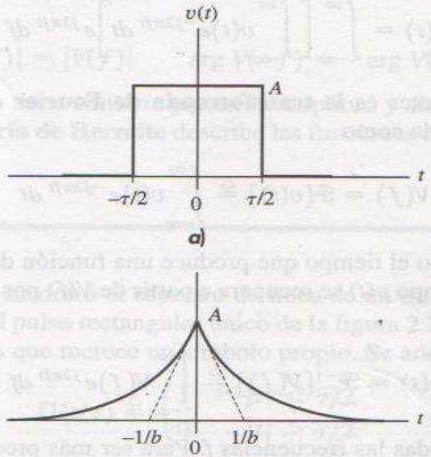


Figura 2.2-1

Algunos cálculos de energía se hacen por inspección, ya que E es justo el área total bajo la curva de $|v(t)|^2$. Por ejemplo, la energía de un pulso rectangular de amplitud A es simplemente $E = A^2\tau$.

Cuando la integral en la ecuación (1) existe y resulta en $0 < E < \infty$, se dice que la señal $v(t)$ tiene energía bien definida y se llama **señal de energía no periódica**. Casi todas las señales limitadas en tiempo y que tienen un interés práctico caen en esta categoría, que es la condición esencial del análisis espectral al usar la transformada de Fourier.

Para introducir la transformada de Fourier, se comenzará con la representación en serie de Fourier de una señal de potencia periódica

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t} \qquad [2]$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} \, dt \right] e^{j2\pi n f_0 t}$$

donde la expresión integral para $c(nf_0)$ se ha sustituido por completo. Según el **teorema de la integral de Fourier**, existe una representación similar para una señal de energía no periódica que pueda considerarse una forma límite de la serie de Fourier de una señal conforme el periodo tiende a infinito. El ejemplo 2.1-1 mostró que las componentes espectrales de un tren de pulsos están colocadas en intervalos de $nf_0 = n/T_0$, de modo que tienden a acercarse conforme el periodo del tren de pulsos aumenta. Sin embargo, la forma del espectro permanece inalterada si la anchura del pulso τ no cambia. Supóngase que la separación en frecuencia $f_0 = T_0^{-1}$ tiende a cero (representada en la ecuación 3 como df) y que el índice n tiende a infinito, de modo que el producto nf_0 tiende a una variable de frecuencia continua f. Entonces

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} \, dt \right] e^{j2\pi f t} \, df \qquad [3]$$

El término entre corchetes es la **transformada de Fourier** de $v(t)$ simbolizada por $V(f)$ o $\mathcal{F}[v(t)]$ y definida como

$$V(f) = \mathcal{F}[v(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j2\pi f t} \, dt \qquad [4]$$

una integración por todo el tiempo que produce una función de la variable continua f.

La función del tiempo $v(t)$ se recupera a partir de $V(f)$ por la **transformada inversa de Fourier**

$$v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} V(f) e^{j2\pi f t} \, df \qquad [5]$$

una integración para todas las frecuencias f. Para ser más precisos, se debe establecer que $\mathcal{F}^{-1}[V(f)]$ **converge en la media** a $v(t)$, similar a la convergencia de las series de Fourier, con la ocurrencia del fenómeno de Gibbs en las discontinuidades. Pero la ecuación (5) se considerará como si fuese una igualdad para la mayoría de nuestros objetivos. En la Sec. 2.5 se bosquejará una demostración de que $\mathcal{F}^{-1}[V(f)] = v(t)$.

Las ecuaciones (4) y (5) constituyen el par de **integrales de Fourier**.† A primera vista, estas integrales parecen ser un círculo cerrado de operaciones. No obstante, en un problema dado, usualmente se conoce ya sea $V(f)$ o $v(t)$. Si se conoce $V(f)$, se determina $v(t)$ por la ecuación (5); si se conoce $v(t)$, se determina $V(f)$ a partir de la ecuación (4).

Regresando a la representación en el dominio de la frecuencia, una comparación de las ecuaciones (2) y (5) indica que $V(f)$ tiene el mismo papel para señales no periódicas que el de $c(nf_0)$ para señales periódicas. Así pues, $V(f)$ es el **espectro** de la señal no periódica $v(t)$. Pero $V(f)$ es una función continua definida para todos los valores de f, mientras que $c(nf_0)$ está definida sólo para frecuencias discretas. En consecuencia, una señal no periódica tendrá un **espectro continuo** en lugar de un espectro de línea. De nuevo, la comparación de las ecuaciones (2) y (5) ayuda a explicar esta diferencia: en el caso periódico se regresa al dominio del tiempo *sumando* fasores de frecuencias discretas, mientras que en el caso no periódico se *integra* una función de frecuencia continua. A continuación se dan tres propiedades importantes de $V(f)$:

1. La transformada de Fourier es una función compleja, así que $|V(f)|$ es el espectro de amplitud de $v(t)$ y $\arg V(f)$ es el espectro de fase.
2. El valor de $V(f)$ en $f = 0$ es igual al **área neta** de $v(t)$ ya que

$$V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt \qquad [6]$$

que se compara con el caso periódico, donde, $c(0)$ es igual al valor promedio de $v(t)$.

3. Si $v(t)$ es **real**, entonces

$$V(-f) = V^*(f) \qquad [7a]$$

y

$$|V(-f)| = |V(f)| \qquad \arg V(-f) = -\arg V(f) \qquad [7b]$$

así que de nuevo se tiene simetría par en la amplitud y simetría impar en la fase. La expresión **simetría de Hermite** describe las funciones complejas que obedecen la ecuación (7).

Pulso rectangular **EJEMPLO 2.2-1**

En la última sección se encontró el espectro de línea de un tren de pulsos rectangulares. Considérese ahora el pulso rectangular único de la figura 2.2-1*a*. Éste es tan común como modelo de señales que merece un símbolo propio. Se adoptará la notación

$$\Pi(t/\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \qquad [8]$$

† Otras definiciones toman ω para la variable de frecuencia y por ello incluyen $1/2\pi$ o $1/\sqrt{2\pi}$ como términos multiplicadores.

que representa una función rectangular con amplitud unitaria y duración τ centrada en $t = 0$. El pulso en la figura se escribe entonces como

$$v(t) = A\Pi(t/\tau) \qquad [9a]$$

Insertando $v(t)$ en la ecuación (4) da

$$V(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j2\pi ft}\,dt = \frac{A}{\pi f}\,\text{sen}\,\pi f\tau \qquad [9b]$$
$$= A\tau\,\text{sinc}\,f\tau$$

de modo que $V(0) = A\tau$, que claramente es igual al área del pulso. El espectro correspondiente, graficado en la figura 2.2-2, debe compararse con la figura 2.1-8 para ilustrar las semejanzas y diferencias entre los espectros de línea y los espectros continuos.

Una inspección más minuciosa de la figura 2.2-2 revela que la porción significativa del espectro está en la banda $|f| < 1/\tau$, puesto que $|V(f)| \ll |V(0)|$ para $|f| > 1/\tau$. Por tanto, puede tomarse $1/\tau$ como una medida de la "anchura" espectral. Ahora, si la duración del pulso se reduce (τ pequeña), la anchura en frecuencia se aumenta, mientras que un aumento de la duración reduce la anchura espectral. Así pues, pulsos cortos tienen espectros anchos y pulsos largos tienen espectros angostos. Este fenómeno, conocido como **dispersión recíproca**, es una propiedad general de todas las señales, sean pulsos o no, porque las variaciones rápidas en tiempo requieren componentes de alta frecuencia, mientras que variaciones temporales más suaves y lentas requieren relativamente poco contenido de alta frecuencia.

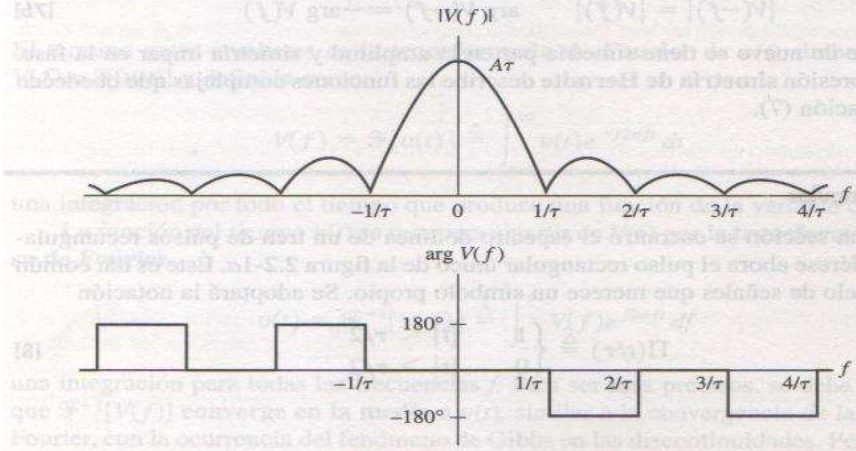


Figura 2.2-2 Espectro del pulso rectangular $V(f) = A\tau\,\text{sinc}\,f\tau$.

Señales simétricas y causales

Cuando una señal posee simetría con respecto al eje del tiempo, la integral de su transformada se simplifica. Por supuesto, cualquier simetría de la señal depende tanto de la forma de la onda como de la posición del origen del tiempo. Pero normalmente hay libertad para escoger el origen del tiempo, ya que físicamente no es único, en contraste con el origen del dominio de la frecuencia, que sí tiene un significado físico definido.

A fin de desarrollar las propiedades de simetría en el tiempo, se escribirá ω en lugar de $2\pi f$ por comodidad operacional y se expandirá la ecuación (4) usando $e^{-j2\pi ft} = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t$. Así que, en general,

$$V(f) = V_e(f) + jV_o(f) \qquad [10a]$$

donde

$$V_e(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) \cos \omega t \, dt \qquad [10b]$$

$$V_o(f) \triangleq -\int_{-\infty}^{\infty} v(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

que son las partes **par** e **impar** de $V(f)$, indiferentemente de $v(t)$. Entre paréntesis, observe que si $v(t)$ es **real**, entonces

$$\text{Re}\,[V(f)] = V_e(f) \qquad \text{Im}\,[V(f)] = V_o(f)$$

de modo que $V^*(f) = V_e(f) - jV_o(f) = V(-f)$, como ya se expresó en la ecuación (7).

Cuando $v(t)$ tiene simetría en el tiempo, las integrales se simplifican en la ecuación (10*b*) aplicando la relación general

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} w(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} w(t)\,dt \qquad [11]$$

$$= \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^{\infty} w(t)\,dt & w(t) \text{ par} \\ 0 & w(t) \text{ impar} \end{cases}$$

donde $w(t)$ representa ya sea $v(t)\cos\omega t$ o bien $v(t)\operatorname{sen}\omega t$. Si $v(t)$ tiene **simetría par** de manera que

$$v(-t) = v(t) \qquad [12a]$$

entonces $v(t)\cos\omega t$ es par, mientras que $v(t)\operatorname{sen}\omega t$ es impar. En consecuencia, $V_o(f) = 0$ y

$$V(f) = V_e(f) = 2\int_0^{\infty} v(t)\cos\omega t\,dt \qquad [12b]$$

Inversamente, si $v(t)$ tiene **simetría impar** de modo que

$$v(-t) = -v(t) \qquad [13a]$$

entonces

$$V(f) = jV_o(f) = -j2\int_0^{\infty} v(t)\operatorname{sen}\omega t\,dt \qquad [13b]$$

y $V_e(f) = 0$.

Las ecuaciones (12) y (13) muestran asimismo que el espectro de una señal **real y simétrica** será puramente real y par o puramente imaginaria e impar. Así, el pulso rectangular en el ejemplo 2.2-1 es una función real del tiempo y a la vez par, y se encontró que su espectro es una función par de la frecuencia y además real.

Considere ahora el caso de una señal **causal**, definida por la propiedad de que

$$v(t) = 0 \qquad t < 0 \qquad [14a]$$

Esto significa sencillamente que la señal "comienza" en $t = 0$ o después de $t = 0$. Como la causalidad elimina cualquier simetría en el tiempo, el espectro está formado por partes reales e imaginarias calculadas a partir de

$$V(f) = \int_0^{\infty} v(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \qquad [14b]$$

Esta integral tiene cierto parecido con la **transformada de Laplace** usada comúnmente para el estudio de transitorios en circuitos y sistemas lineales. En consecuencia, se considerarán brevemente las semejanzas y diferencias entre estos dos tipos de transformadas.

La transformada de Laplace unilateral es una función de la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ definida por

$$\mathcal{L}[v(t)] \triangleq \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}\,dt$$

la cual implica que $v(t) = 0$ para $t < 0$. Comparando $\mathcal{L}[v(t)]$ con la ecuación (14b) muestra que si $v(t)$ es una señal de **energía causal**, se puede obtener $V(f)$ a partir de la transformada de Laplace haciendo $s = j2\pi f$. Pero una tabla típica de transformadas de Laplace incluye muchas señales que **no son de energía**, cuyas transformadas de Laplace existen sólo con $\sigma > 0$, de modo que $|v(t)e^{-st}| = |v(t)e^{-\sigma t}| \to 0$ conforme $t \to \infty$. Estas señales no tienen una transformada de Fourier porque $s = \sigma + j\omega$ cae fuera del dominio de la frecuencia cuando $\sigma \neq 0$. Por otra parte, la transformada de Fourier existe para señales de energía no causales que no tienen una transformada de Laplace. Véase Kamen y Heck (1997, capítulo7) para una discusión más detallada.

EJEMPLO 2.2-2 **Pulso exponencial causal**

La figura 2.2-3*a* muestra una forma de onda causal que decae exponencialmente con una constante de tiempo $1/b$, de modo que

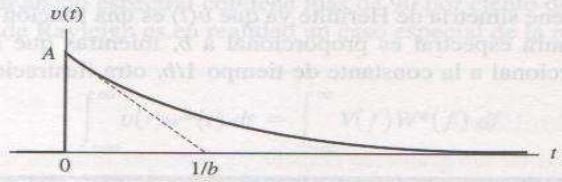
$$v(t) = \begin{cases} Ae^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad [15a]$$

El espectro se obtiene a partir de la ecuación (14*b*) o de la transformada de Laplace $\mathcal{L}[v(t)] = A/(s + b)$, con el resultado en el que

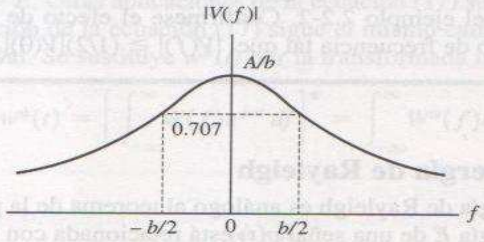
$$V(f) = \frac{A}{b + j2\pi f} \qquad [15b]$$

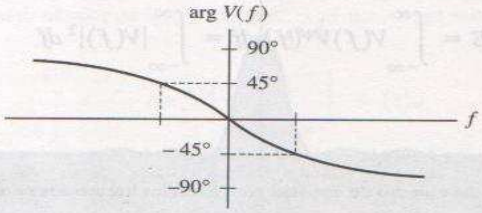
que es una función compleja de forma no racionalizada. Multiplicando el numerador y el denominador de la ecuación (15*b*) por $b - j2\pi f$ se obtiene la expresión racionalizada

$$V(f) = \frac{b - j2\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2} A$$



a)





b)

Figura 2.2-3 Pulso exponencial causal. *a*) Forma de onda; *b*) espectro.

y se ve que

$$V_e(f) = \text{Re}\,[V(f)] = \frac{bA}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

$$V_o(f) = \text{Im}\,[V(f)] = -\frac{2\pi f A}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

Convirtiendo la forma polar se tienen entonces los espectros de amplitud y de fase

$$|V(f)| = \sqrt{V_e^2(f) + V_o^2(f)} = \frac{A}{\sqrt{b^2 + (2\pi f)^2}}$$

$$\arg V(f) = \arctan \frac{V_o(f)}{V_e(f)} = -\arctan \frac{2\pi f}{b}$$

que se grafican en la figura 2.2-3*b*.

El espectro de fase en este caso es una curva suave que incluye todos los ángulos desde −90° hasta +90°. Esto se debe a la falta de simetría en el tiempo de la señal. Pero $V(f)$ todavía tiene simetría de Hermite ya que $v(t)$ es una función real. Observe también que la anchura espectral es proporcional a b, mientras que la "anchura" en el tiempo es proporcional a la constante de tiempo $1/b$, otra ilustración de la dispersión recíproca.

EJERCICIO 2.2-1 Determínese y grafíquese $V(f)$ para la exponencial decreciente simétrica $v(t) = Ae^{-b|t|}$ en la figura 2.2-1*b*. (Debe usarse la integral definida de la tabla T. 3.) Compárese su resultado con $V_e(f)$ en el ejemplo 2.2-2. Confírmese el efecto de dispersión recíproca calculando el intervalo de frecuencia tal que $|V(f)| \geq (1/2)|V(0)|$.

Teorema de la energía de Rayleigh

El teorema de la energía de Rayleigh es análogo al teorema de la potencia de Parseval. Establece que la energía E de una señal $v(t)$ está relacionada con el espectro $V(f)$ por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)V^*(f)\,df = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\,df \qquad [16]$$

En consecuencia,

Integrando el cuadrado del espectro de amplitud para todas las frecuencias se obtiene la energía total.

El valor de la ecuación (16) no reside tanto en el cálculo de E, ya que la integración en el dominio del tiempo de $|v(t)|^2$ suele ser sencilla. Más bien implica que $|V(f)|^2$ da la distribución de energía en el dominio de la frecuencia y, por tanto, puede denominarse **densidad espectral de energía**. Con esto se quiere decir que la energía en cualquier banda de frecuencia diferencial df es igual a $|V(f)|^2\,df$, una interpretación que se justificará en la Sec. 3.6. Esta interpretación, a su vez, le da soporte cuantitativo a la noción de ancho espectral en el sentido de que la mayor parte de la energía de una señal dada debe estar contenida en el intervalo de frecuencias tomado como el ancho espectral.

A título de ejemplo, la figura 2.2-4 es la densidad espectral de energía de un pulso rectangular, del cual se dijo que su ancho espectral es $|f| < 1/\tau$. La energía en esa banda es el área sombreada en la figura, a saber:

$$\int_{-1/\tau}^{1/\tau} |V(f)|^2\,df = \int_{-1/\tau}^{1/\tau} (A\tau)^2 \operatorname{sinc}^2 f\tau\,df = 0.92A^2\tau$$

un cálculo que requiere de métodos numéricos. Pero la energía total del pulso es $E \approx A^2\tau$, de manera que el ancho espectral contiene más de 90 por ciento de la energía total.

El teorema de Rayleigh es en realidad un caso especial de la relación integral más general

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f)W^*(f)\,df \qquad [17]$$

donde $v(t)$ y $w(t)$ son señales de energía arbitrarias con transformadas $V(f)$ y $W(f)$. Si se hace $w(t) = v(t)$, la ecuación (17) genera la ecuación (16) y se aprecia que $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)v^*(t)\,dt = E$. Otras aplicaciones de la ecuación (17) surgirán subsecuentemente.

La demostración de la ecuación (17) sigue el mismo camino que la deducción del teorema de Parseval. Se sustituye $w^*(t)$ por la transformada inversa

$$w^*(t) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} W(f)e^{j\omega t}\,df\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} W^*(f)e^{-j\omega t}\,df$$

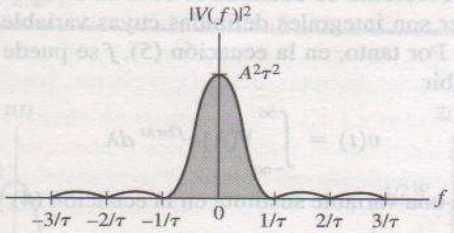


Figura 2.2-4 Densidad espectral de energía de un pulso rectangular.

Intercambiando el orden de las integraciones en el tiempo y en frecuencia da entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)w^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} W^*(f)e^{-j\omega t}\,df\right]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}\,dt\right]W^*(f)\,df$$

lo que completa la demostración, ya que el término entre corchetes es igual a $V(f)$.

El *intercambio de las operaciones de integración* ilustrado aquí es una técnica valiosa en el análisis de señales y conduce a muchos resultados útiles. No obstante, la técnica no se debe aplicar sin considerar primero la validez del intercambio. Como una guía pragmática, se supone que el intercambio es válido si los resultados tienen sentido. Si se tiene duda, verifique los resultados con algunos casos sencillos con respuestas conocidas.

EJERCICIO 2.2-2 Calcúlese la energía de un pulso exponencial causal mediante la aplicación del teorema de Rayleigh a $V(f)$ en la ecuación (15*b*). Después verifíquese su resultado integrando $|v(t)|^2$.

Teorema de la dualidad

Si se reexamina el par de integrales de Fourier, se verá que difieren sólo por la variable de integración y por el signo en el exponente. Una consecuencia importante de esta semejanza es el **teorema de dualidad**. El teorema afirma que si $v(t)$ y $V(f)$ constituyen un par de transformadas conocidas y si existe una **función del tiempo** $z(t)$ relacionada con la función $V(f)$ por

$$z(t) = V(t) \qquad [18a]$$

entonces

$$\mathcal{F}[z(t)] = v(-f) \qquad [18b]$$

donde $v(-f)$ es igual a $v(t)$ con $t = -f$.

La demostración del teorema de dualidad se basa en el reconocimiento de que las transformadas de Fourier son integrales definidas cuyas variables de integración sólo son variables *sustitutas*. Por tanto, en la ecuación (5), f se puede remplazar por la variable sustituta λ y escribir

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda)e^{j2\pi\lambda t}\,d\lambda$$

Además, puesto que t es una variable sustituta en la ecuación (4) y como $z(t) = V(t)$ en el teorema,

$$\mathcal{F}[z(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} z(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda}\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} V(\lambda)e^{j2\pi\lambda(-f)}\,d\lambda$$

Comparando estas integrales se confirma entonces que $\mathcal{F}[z(t)] = v(-f)$.

Aunque la afirmación de dualidad en la ecuación (18) parece un tanto abstracta, resulta de mucha ayuda en la generación de nuevos pares de transformadas sin el trabajo de la integración. El teorema se aplica mejor cuando $v(t)$ es real y par, de modo que $z(t)$ será también real y par, y $Z(f) = \mathcal{F}[z(t)] = v(-f) = v(f)$. El siguiente ejemplo debe aclarar el procedimiento.

Pulso sinc **EJEMPLO 2.2-3**

Una función de tiempo más bien extraña pero importante en la teoría de la comunicación es el **pulso sinc**, graficado en la figura 2.2-5*a* y definido como

$$z(t) = A \operatorname{sinc} 2Wt \qquad [19a]$$

Se obtendrá $Z(f)$ aplicando dualidad al par de transformadas

$$v(t) = B\Pi(t/\tau) \qquad V(f) = B\tau \operatorname{sinc} f\tau$$

Escribiendo de nuevo la ecuación (19*a*) como

$$z(t) = \left(\frac{A}{2W}\right)(2W) \operatorname{sinc} t(2W)$$

pone de manifiesto el hecho de que $z(t) = V(t)$ con $\tau = 2W$ y $B = A/2W$. La dualidad establece entonces que $\mathcal{F}[z(t)] = v(-f) = B\Pi(-f/\tau) = (A/2W)\Pi(-f/2W)$ o

$$Z(f) = \frac{A}{2W}\,\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) \qquad [19b]$$

ya que la función rectangular tiene simetría par.

La gráfica de $Z(f)$, dada en la figura 2.2-5*b*, muestra que el espectro de un pulso sinc es igual a cero para $|f| > W$. Así pues, el espectro tiene claramente definido el ancho W, medido en términos de frecuencia positiva y se dice que $Z(f)$ es de **banda limitada**. Obsérvese, sin embargo, que la señal $z(t)$ continúa eternamente y sólo está limitada asintóticamente en el tiempo.

Determine la transformada de $z(t) = B/[1 + (2\pi t)^2]$ mediante la aplicación de dualidad al resultado del ejercicio 2.2-1. **EJERCICIO 2.2-3**

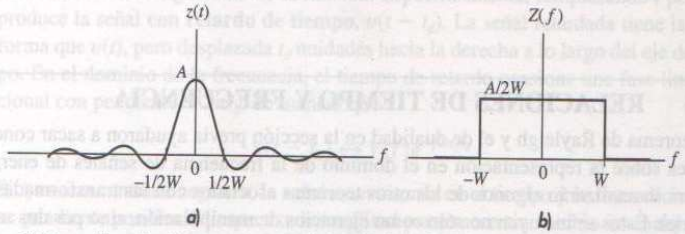


Figura 2.2-5 Un pulso sinc y su espectro de banda limitada.

Cálculos de transformadas

Excepto en el caso de una forma de onda muy sencilla, la integración por fuerza bruta debe verse como el último recurso para el cálculo de transformadas. Aquí se discuten otros métodos más prácticos.

Cuando la señal en cuestión está definida matemáticamente, primero hay que consultar una tabla de transformadas de Fourier para ver si el cálculo ya se hizo antes. Ambas columnas de la tabla pueden ser útiles en vista del teorema de dualidad. Una tabla de transformadas de Laplace también tiene valor, como ya se mencionó respecto de la ecuación (14).

Además de la dualidad, hay otros teoremas de transformadas que se ven en la Sec. 2.3. Estos teoremas a menudo ayudan a descomponer una forma de onda complicada en partes más sencillas cuyas transformadas son conocidas. Siguiendo este mismo razonamiento, puede ser conveniente *aproximar* una forma de onda por medio de modelos de señales idealizadas. Suponga que $\tilde{z}(t)$ aproxima a $z(t)$ y que la magnitud del cuadrado del error $|z(t) - \tilde{z}(t)|^2$ es una cantidad pequeña. Si $Z(f) = \mathcal{F}[z(t)]$ y $\tilde{Z}(f) = \mathcal{F}[\tilde{z}(t)]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Z(f) - \tilde{Z}(f)|^2\, df = \int_{-\infty}^{\infty} |z(t) - \tilde{z}(t)|^2\, dt \qquad [20]$$

la cual se obtiene del teorema de Rayleigh con $v(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$. Así pues, el error de aproximación integrado tiene el mismo valor en los dominios de tiempo y de frecuencia.

Los métodos anteriores se modifican fácilmente para el cálculo de los coeficientes de la serie de Fourier. Específicamente, sea $v(t)$ una señal periódica y sea $z(t) = v(t)\Pi(t/T_0)$ una señal no periódica que consta de un periodo de $v(t)$. Si se obtiene

$$Z(f) = \mathcal{F}[v(t)\Pi(t/T_0)] \qquad [21a]$$

entonces, de la ecuación (14), Sec. 2.1, los coeficientes de $v(t)$ están dados por

$$c_n = \frac{1}{T_0} Z(nf_0) \qquad [21b]$$

Esta relación facilita la aplicación de teoremas de transformadas en los cálculos de series de Fourier.

Finalmente, si la señal está definida en forma numérica, su transformada se determina mediante cálculos numéricos. El algoritmo FFT de computadora es especialmente adecuado para este propósito. Para más detalles sobre el algoritmo y la teoría en que se basan las transformadas de Fourier discretas, véase Oppenheim, Schafer y Buck (1999).

2.3 RELACIONES DE TIEMPO Y FRECUENCIA

El teorema de Rayleigh y el de dualidad en la sección previa ayudaron a sacar conclusiones sobre la representación en el dominio de la frecuencia de señales de energía. Ahora se analizarán algunos de los otros teoremas asociados con las transformadas de Fourier. Éstos se incluyen no sólo como ejercicios de manipulación, sino por dos razones prácticas. Primera, los teoremas son invaluables cuando se interpretan espectros, ya

que expresan relaciones entre operaciones en los dominios del tiempo y la frecuencia. Segunda, es posible construir un catálogo extenso de pares de transformadas aplicando los teoremas a pares conocidos, y un catálogo así será muy útil cuando se busquen nuevos modelos de señales.

Al enunciar los teoremas, se indican una señal y su transformada (o espectro) con letras minúsculas y mayúsculas, como en $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$ y $v(t) = \mathcal{F}^{-1}[V(f)]$. Esto se denota también de manera más abreviada como $v(t) \leftrightarrow V(f)$. La tabla T.1 al final del libro presenta una lista de los teoremas y los pares de transformadas que cubrimos aquí, más algunas adicionales.

Superposición

La superposición se aplica a la transformada de Fourier en el siguiente sentido. Si a_1 y a_2 son constantes y

$$v(t) = a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t)$$

entonces

$$\mathcal{F}[v(t)] = a_1 \mathcal{F}[v_1(t)] + a_2 \mathcal{F}[v_2(t)]$$

Generalizando a sumas con un número arbitrario de términos, se escribe el teorema de superposición (o de linealidad) como

$$\sum_k a_k v_k(t) \leftrightarrow \sum_k a_k V_k(f) \qquad [1]$$

Este teorema establece simplemente que las combinaciones lineales en el dominio del tiempo se convierten en combinaciones lineales en el dominio de la frecuencia.

Si bien la demostración del teorema es trivial, su importancia no puede subestimarse. Desde un punto de vista práctico, la ecuación (1) facilita en gran medida el análisis espectral cuando la señal en cuestión es una combinación lineal de funciones cuyos espectros individuales son conocidos. Desde un punto de vista teórico, la ecuación (1) subraya la aplicabilidad de la transformada de Fourier para el estudio de sistemas lineales.

Retardo de tiempo y cambio de escala

Dada una función del tiempo $v(t)$, a partir de ella se generan otras señales mediante modificaciones en el argumento de la función. Específicamente, remplazando t por $t - t_d$ produce la señal **con retardo de tiempo**, $v(t - t_d)$. La señal retardada tiene la misma forma que $v(t)$, pero desplazada t_d unidades hacia la derecha a lo largo del eje del tiempo. En el dominio de la frecuencia, el tiempo de retardo ocasiona una fase lineal adicional con pendiente $-2\pi t_d$, de manera que

$$v(t - t_d) \leftrightarrow V(f) e^{-j2\pi f t_d} \qquad [2]$$

Si t_d es una cantidad negativa, la señal es *avanzada* en el tiempo y la fase adicional tiene pendiente positiva. El espectro de amplitud permanece sin cambio en cualquiera de los casos, puesto que $|V(f)e^{-j2\pi f t_d}| = |V(f)||e^{-j2\pi f t_d}| = |V(f)|$.

La demostración del teorema del retardo de tiempo se lleva a cabo haciendo el cambio de variable $\lambda = t - t_d$ en la integral de la transformada. Así pues, usando $\omega = 2\pi f$ para abreviar, se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[v(t - t_d)] &= \int_{-\infty}^{\infty} v(t - t_d) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) e^{-j\omega(\lambda + t_d)}\, d\lambda \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) e^{-j\omega\lambda}\, d\lambda\right] e^{-j\omega t_d}\end{aligned}$$

La integral entre corchetes es precisamente $V(f)$, de modo que $\mathcal{F}[v(t - t_d)] = V(f)e^{-j\omega t_d}$.

Otra operación en el eje del tiempo es el *cambio de escala,* que produce una imagen de $v(t)$ escalada horizontalmente remplazando t por αt. La señal escala $v(\alpha t)$ *se expandirá* si $|\alpha| < 1$ o *se comprimirá* si $|\alpha| > 1$; un valor negativo de α produce tanto una *inversión* del tiempo como una expansión o compresión. Estos efectos pueden ocurrir, por ejemplo, durante la reproducción de señales grabadas.

El cambio de escala en el dominio del tiempo se convierte en un cambio de escala *recíproco* en el dominio de la frecuencia, puesto que

$$v(\alpha t) \leftrightarrow \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right) \qquad \alpha \neq 0 \qquad [3]$$

Por tanto, al comprimir una señal se expande su espectro y viceversa. Si $\alpha = -1$, entonces $v(-t) \leftrightarrow V(-f)$, de manera que tanto la señal como su espectro se invierten.

Se demostrará la ecuación (3) para el caso de $\alpha < 0$ escribiendo $\alpha = -|\alpha|$ y haciendo el cambio de variable $\lambda = -|\alpha|t$. En consecuencia, $t = \lambda/\alpha$, $dt = -d\lambda/|\alpha|$ y

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[v(-|\alpha|t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(-|\alpha|t) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \frac{-1}{|\alpha|} \int_{+\infty}^{-\infty} v(\lambda) e^{-j\omega\lambda/\alpha}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{+\infty} v(\lambda) e^{-j2\pi(f/\alpha)\lambda}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{|\alpha|} V\left(\frac{f}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

Obsérvese cómo esta demostración usa la relación general

$$\int_a^b x(\lambda)\, d(-\lambda) = -\int_{-a}^{-b} x(\lambda)\, d\lambda = \int_{-b}^{-a} x(\lambda)\, d\lambda$$

De aquí en adelante se omitirá el paso intermedio cuando ocurra este tipo de manipulación.

EJEMPLO 2.3-1

La señal de la figura 2.3-1*a* se construyó usando dos pulsos rectangulares $v(t) = A\Pi(t/\tau)$, de manera que

$$z_a(t) = v(t - t_d) + (-1)v[t - (t_d + T)]$$

La aplicación de los teoremas de superposición y de retardo de tiempo dan

$$Z_a(f) = V(f)e^{-j2\pi f t_d} + (-1)V(f)e^{-j2\pi f(t_d+T)}$$
$$= V(f)[e^{-j2\pi f t_d} - e^{-j2\pi f(t_d+T)}]$$

donde $V(f) = A\tau \operatorname{sinc} f\tau$.

El término entre corchetes en $Z_a(f)$ es un caso particular de la expresión $e^{j2\theta_1} \pm e^{j2\theta_2}$ que aparece con frecuencia en el análisis de Fourier. Una versión de esta expresión que ofrece más información se obtiene factorizando y usando el teorema de Euler en la forma siguiente:

$$e^{j2\theta_1} \pm e^{j2\theta_2} = [e^{j(\theta_1-\theta_2)} \pm e^{-j(\theta_1-\theta_2)}]e^{j(\theta_1+\theta_2)} \qquad [4]$$
$$= \begin{cases} 2\cos(\theta_1 - \theta_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)} \\ j2\ \text{sen}\ (\theta_1 - \theta_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)} \end{cases}$$

El resultado de la parte superior en la ecuación (4) corresponde al signo superior (+) y el de la parte inferior al signo inferior (−).

En este problema se tiene $\theta_1 = -\pi f t_d$ y $\theta_2 = -\pi f(t_d + T)$, de modo que $\theta_1 - \theta_2 = \pi f T$ y $\theta_1 + \theta_2 = -2\pi f t_0$, donde $t_0 = t_d + T/2$, como se indica en la figura 2.3-1*a*. En consecuencia, luego de sustituir por $V(f)$, se obtiene

$$Z_a(f) = (A\tau \operatorname{sinc} f\tau)(j2\ \text{sen}\ \pi f T\, e^{-j2\pi f t_0})$$

Obsérvese que $Z_a(0) = 0$, lo que coincide con el hecho de que $z_a(t)$ tiene un área neta igual a cero.

Si $t_0 = 0$ y $T = \tau$, $z_a(t)$ se modifica en la forma de onda en la figura 2.3-1*b*, donde

$$z_b(t) = A\Pi\left(\frac{t + \tau/2}{\tau}\right) - A\Pi\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right)$$

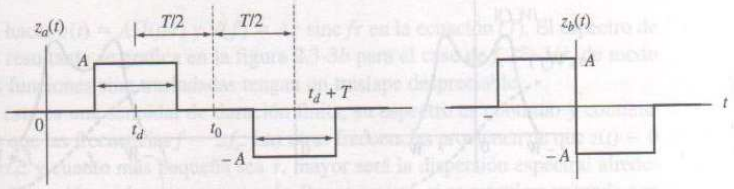


Figura 2.3-1 Señales en el ejemplo 2.3-1.

El espectro se convierte entonces en

$$Z_b(f) = (A\tau \operatorname{sinc} f\tau)(j2\ \text{sen}\ \pi f\tau)$$
$$= (j2\pi f\tau)A\tau \operatorname{sinc}^2 f\tau$$

Este espectro es solamente imaginario porque $z_b(t)$ tiene simetría impar.

EJERCICIO 2.3-1

Sea $v(t)$ una señal de energía *real*, pero arbitraria en cualquier otro sentido. Demuéstrese que si

$$z(t) = a_1 v(t) + a_2 v(-t) \qquad [5a]$$

entonces

$$Z(f) = (a_1 + a_2)V_e(f) + j(a_1 - a_2)V_o(f) \qquad [5b]$$

donde $V_e(f)$ y $V_o(f)$ son las partes real e imaginaria de $V(f)$.

Traslación y modulación de frecuencia

Además de generar nuevos pares de transformadas, la dualidad se usa para generar teoremas de transformadas. En particular, un dual del teorema de retardo de tiempo es

$$v(t)e^{j\omega_c t} \leftrightarrow V(f - f_c) \qquad \omega_c = 2\pi f_c \qquad [6]$$

A esta relación se le conoce como **traslación de frecuencia** o **modulación compleja**, ya que la multiplicación de una función en el tiempo por $e^{j\omega_c t}$ hace que su espectro sea trasladado en frecuencia por $+f_c$.

Para ver los efectos de la traslación de frecuencia, supóngase que $v(t)$ tiene el espectro limitado en banda de la figura 2.3-2*a*, donde la amplitud y la fase están graficadas en los mismos ejes usando líneas sólidas y punteadas, respectivamente. También sea $f_c > W$. Una inspección del espectro trasladado $V(f - f_c)$ en la figura 2.3-2*b* revela lo siguiente:

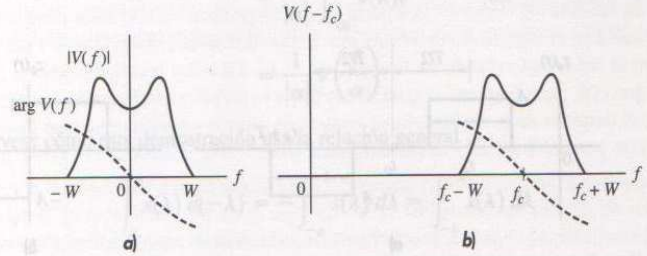


Figura 2.3-2 Traslación de frecuencia de un espectro limitado en banda.

1. Las componentes significativas están concentradas alrededor de la frecuencia f_c.
2. Aunque $V(f)$ estaba limitada en banda a W, $V(f - f_c)$ tiene un ancho espectral de $2W$. Así que la traslación ha duplicado el ancho espectral. Dicho de otra forma, la parte de frecuencias negativas de $V(f)$ aparece ahora en frecuencias positivas.
3. $V(f - f_c)$ no es de Hermite, pero sí tiene simetría con respecto al origen trasladado a $f = f_c$.

Estas consideraciones pueden parecer algo académicas en vista del hecho de que $v(t)e^{j\omega_c t}$ no es una función real del tiempo y no ocurre como una señal de comunicación. No obstante, ciertas señales de la forma $v(t)\cos(\omega_c t + \phi)$ son comunes —de hecho, son la base de la modulación de portadora— y por extensión directa de la ecuación (6) se tiene el siguiente **teorema de modulación**:

$$v(t)\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{e^{j\phi}}{2}V(f - f_c) + \frac{e^{-j\phi}}{2}V(f + f_c) \qquad [7]$$

Parafraseando la ecuación (7), la multiplicación de una señal por una senoidal traslada su espectro *hacia arriba y hacia abajo* en frecuencia por f_c. Todos los comentarios sobre modulación compleja también se aplican aquí. Además, el espectro resultante es de Hermite, lo cual debe ser si $v(t)\cos(\omega_c t + \phi)$ es una función real del tiempo. El teorema se demuestra fácilmente con la ayuda del teorema de Euler y la ecuación (6).

Pulso de RF **EJEMPLO 2.3-2**

Considérese la senoidal de duración finita de la figura 2.3-3*a*, algunas veces llamada pulso de RF (radiofrecuencia) cuando f_c cae en la banda de radiofrecuencias. (Véase la figura 1.1-2 para la banda de frecuencias que apoya las ondas de radio.) Puesto que

$$z(t) = A\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega_c t$$

de inmediato se tiene

$$Z(f) = \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f - f_c)\tau + \frac{A\tau}{2}\operatorname{sinc}(f + f_c)\tau$$

obtenida al hacer $v(t) = A\Pi(t/\tau)$ y $V(f) = A\tau\operatorname{sinc} f\tau$ en la ecuación (7). El espectro de amplitudes resultante se grafica en la figura 2.3-3*b* para el caso de $f_c \gg 1/\tau$, de modo que las dos funciones sinc trasladadas tengan un traslape despreciable.

Como ésta es una senoidal de duración finita, su espectro es continuo y contiene mucho más que las frecuencias $f = \pm f_c$. Las otras frecuencias provienen de que $z(t) = 0$ para $|t| > \tau/2$, y cuanto más pequeña sea τ, mayor será la dispersión espectral alrededor de $\pm f_c$, dispersión recíproca una vez más. Por otra parte, si se estuviera tratando con una senoidal de duración *infinita,* la representación en el dominio de la frecuencia sería un espectro de *líneas* bilateral con solamente frecuencias discretas en $\pm f_c$.

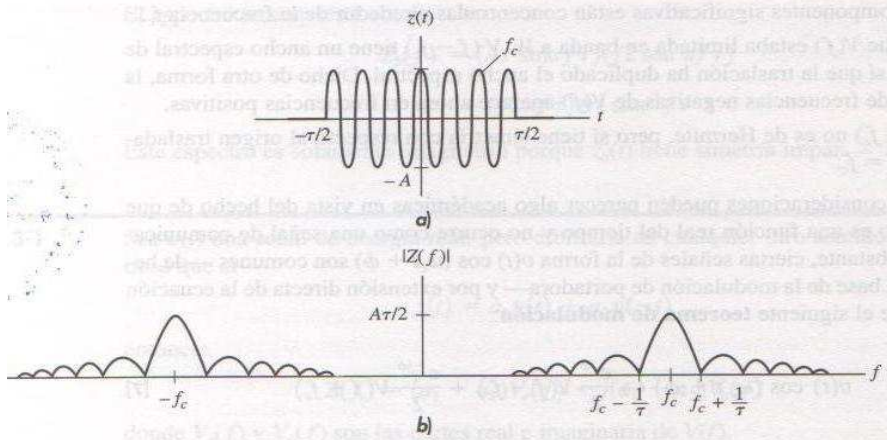


Figura 2.3-3 *a*) Pulso de RF; *b*) espectro de amplitud.

Diferenciación e integración

Ciertas técnicas de procesamiento comprenden la diferenciación o bien la integración de una señal. Los efectos de estas operaciones en el dominio de la frecuencia se indican en los teoremas que siguen. Sin embargo, vale la pena una advertencia: los teoremas no deben aplicarse antes de una verificación para estar seguros de que la señal diferenciada o integrada es transformable en Fourier; el hecho de que $v(t)$ tenga energía finita no es garantía de que lo mismo sea válido para su derivada o su integral.

Para deducir el teorema de la diferenciación, se remplaza $v(t)$ por la integral de la transformada inversa y se intercambia el orden de las operaciones, en la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty}V(f)e^{j2\pi ft}\,df\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}V(f)\left(\frac{d}{dt}e^{j2\pi ft}\right)df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}[j2\pi f\,V(f)]e^{j2\pi ft}\,df$$

Respecto de la definición de la transformada inversa se ve que el término entre corchetes debe ser $\mathcal{F}[dv(t)/dt]$, de modo que

$$\frac{d}{dt}v(t) \leftrightarrow j2\pi f\,V(f)$$

y por iteración se obtiene

$$\frac{d^n}{dt^n} v(t) \leftrightarrow (j2\pi f)^n V(f) \qquad [8]$$

que es el **teorema de la diferenciación**.

Supóngase ahora que se genera otra función a partir de $v(t)$ integrándola para todo el tiempo pasado. Esta operación se escribe como $\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, d\lambda$, donde se necesita la variable sustituta λ para evitar confusión con la variable independiente t en el límite superior. El **teorema de integración** establece que si

$$V(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\, d\lambda = 0 \qquad [9a]$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} V(f) \qquad [9b]$$

La condición de área neta cero en la ecuación (9*a*) asegura que la señal integrada tiende a cero conforme $t \to \infty$ (esta condición se hará más permisiva en la Sec. 2.5).

Para interpretar estos teoremas, se ve que

> La diferenciación destaca las componentes de alta frecuencia de una señal, puesto que $|j2\pi fV(f)| > |V(f)|$ para $|f| > 1/2\pi$. Inversamente, la integración suprime las componentes de alta frecuencia.

La interpretación espectral concuerda entonces con la observación en el dominio del tiempo de que la diferenciación acentúa las variaciones en el tiempo, mientras que la integración las suaviza.

Pulso triangular **EJEMPLO 2.3-3**

La forma de onda $z_b(t)$ en la figura 2.3-1*b* tiene un área neta de cero y su integración produce una forma de pulso **triangular**. Específicamente, sea

$$w(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} z_b(\lambda)\, d\lambda = \begin{cases} A\left(1 - \dfrac{|t|}{\tau}\right) & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

la cual se grafica en la figura 2.3-4*a*. Aplicando el teorema de integración a $Z_b(f)$ del ejemplo 2.3-1, se obtiene

$$W(f) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{j2\pi f} Z_b(f) = A\tau\, \text{sinc}^2 f\tau$$

como se muestra en la figura 2.3-4*b*. Una comparación de este espectro con el de la figura 2.2-2 revela que el pulso triangular tiene menos contenido de alta frecuencia que

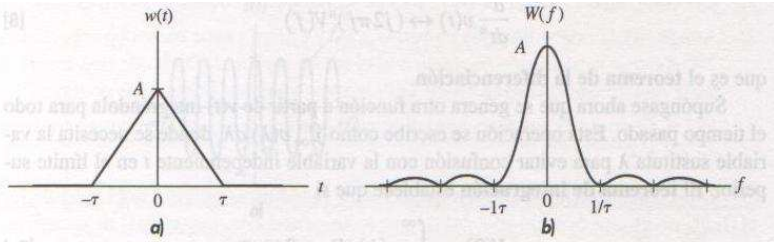


Figura 2.3-4 Un pulso triangular y su espectro.

un pulso rectangular con amplitud A y duración τ, aunque tienen la misma área $A\tau$. La diferencia se debe a que el pulso triangular se ensancha durante 2τ segundos y no tiene las variaciones agudas y escalonadas en el tiempo de la forma rectangular.

El par de transformadas se escribe en forma más abreviada definiendo la **función triangular**

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \triangleq \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{\tau} & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases} \qquad [10]$$

Entonces $w(t) = A\Lambda(t/\tau)$ y

$$A\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\tau\, \text{sinc}^2 f\tau \qquad [11]$$

Sucede que las funciones triangulares se generan a partir de funciones rectangulares usando otra operación matemática, a saber: la convolución. Y resulta que la convolución es el siguiente tema en nuestra exposición.

EJERCICIO 2.3-2 Un dual del teorema de diferenciación es

$$t^n v(t) \leftrightarrow \frac{1}{(-j2\pi)^n}\frac{d^n}{df^n} V(f) \qquad [12]$$

Dedúzcase esta relación para $n = 1$ diferenciando la integral de la transformada $\mathcal{F}[v(t)]$ con respecto a f.

2.4 CONVOLUCIÓN

La operación matemática conocida como convolución es muy importante entre las herramientas usadas por los ingenieros de comunicaciones. Su aplicación incluye el análisis de sistemas y la teoría de la probabilidad, así como el cálculo de transformadas. Lo que interesa aquí es la convolución en los dominios del tiempo y de la frecuencia.

La integral de convolución

La convolución de dos funciones de la misma variable, por ejemplo, $v(t)$ y $w(t)$, está definida por

$$v * w(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) w(t-\lambda)\, d\lambda \qquad [1]$$

La notación $v * w(t)$ representa simplemente la operación en el lado derecho de la ecuación (1) y el asterisco $(*)$ no tiene nada que ver con la conjugación compleja. La ecuación (1) es la **integral de convolución**, a menudo denotada como $v * w$ cuando la variable independiente no produce ambigüedad. Algunas veces la notación $[v(t)] * [w(t)]$ es necesaria por claridad. Obsérvese cuidadosamente que aquí la variable independiente es t, igual a la variable independiente de las funciones sometidas a la convolución; la integración siempre se calcula con respecto a una variable sustituta (como λ) y t es una constante con respecto a la integración.

El cálculo de $v * w(t)$ no es más difícil que la integración ordinaria cuando las dos funciones son continuas para todo t. No obstante, con frecuencia una o ambas funciones están definidas por tramos y la interpretación gráfica de la convolución es de especial utilidad.

Como ilustración, tómense las funciones en la figura 2.4-1*a*, donde

$$v(t) = Ae^{-t} \qquad 0 < t < \infty$$
$$w(t) = t/T \qquad 0 < t < T$$

Para el integrando en la ecuación (1), $v(\lambda)$ tiene la misma forma que $v(t)$ y

$$w(t-\lambda) = \frac{t-\lambda}{T} \qquad 0 < t-\lambda < T$$

Pero obtener la gráfica de $w(t-\lambda)$ como una función de λ requiere dos pasos: primero, se invierte $w(t)$ en el tiempo y se remplaza t por λ para obtener $w(-\lambda)$; segundo, se desplaza $w(-\lambda)$ hacia la derecha por t unidades para obtener $w[-(\lambda - t)] = w(t-\lambda)$ para un valor dado de t. La figura 2.4-1*b* muestra $v(\lambda)$ y $w(t-\lambda)$ con $t < 0$. El valor de t siempre es igual a la distancia desde el origen de $v(\lambda)$ hasta el origen desplazado de $w(-\lambda)$ indicado por la línea punteada.

Conforme $v * w(t)$ se evalúa para $-\infty < t < \infty$, $w(t-\lambda)$ se desliza desde la izquierda hacia la derecha con respecto a $v(\lambda)$, de modo que el integrando de convolución cambia con t. Específicamente, en la figura 2.4-1*b* se ve que las funciones no se traslapan cuando $t < 0$; por tanto, el integrando es igual a cero y

$$v * w(t) = 0 \qquad t < 0$$

Cuando $0 < t < T$ como en la figura 2.4-1*c*, las funciones se traslapan para $0 < \lambda < t$, de manera que t se convierte en el límite superior de la integración y

$$v * w(t) = \int_0^t Ae^{-\lambda}\left(\frac{t-\lambda}{T}\right) d\lambda$$
$$= \frac{A}{T}(t - 1 + e^{-t}) \qquad 0 < t < T$$

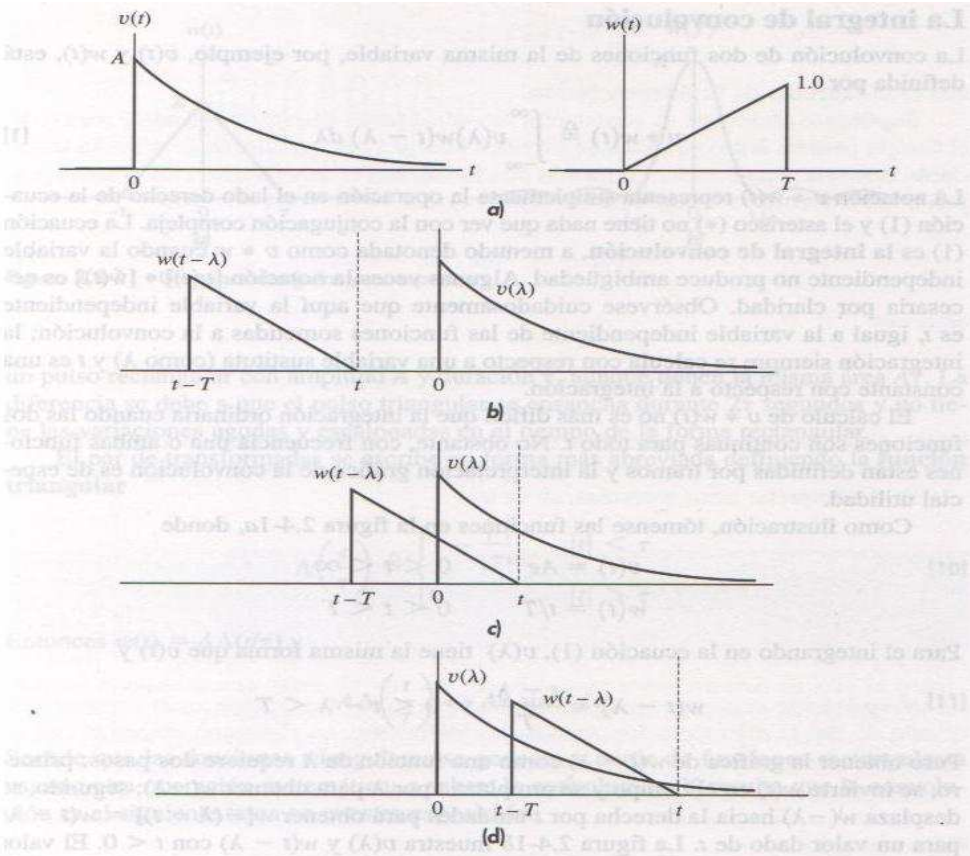


Figura 2.4-1 Interpretación gráfica de la convolución.

Finalmente, cuando $t > T$ como en la figura 2.4-1*d*, las funciones se traslapan para $t - T < \lambda < t$ y

$$v * w(t) = \int_{t-T}^{t} Ae^{-\lambda}\left(\frac{t-\lambda}{T}\right) d\lambda$$
$$= \frac{A}{T}(T - 1 + e^{-T})e^{-(t-T)} \qquad t > T$$

El resultado completo, graficado en la figura 2.4-2, muestra que la convolución es una operación de *suavizamiento* en el sentido de que $v * w(t)$ es "más suave" que cualquiera de las funciones originales.

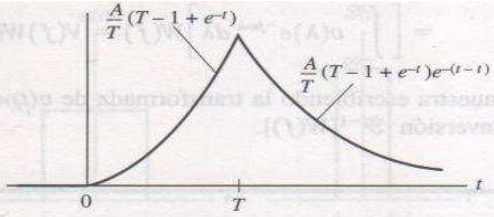


Figura 2.4-2 Resultado de la convolución en la figura 2.4-1.

Teoremas de convolución

La operación de convolución satisface varias propiedades importantes y útiles. Éstas se deducen a partir de la integral de convolución en la ecuación (1). En algunos casos son también evidentes a partir del análisis gráfico. Por ejemplo, un estudio adicional de la figura 2.4-1 debe revelar que se obtiene el mismo resultado invirtiendo v y deslizándola a través de w, de modo que la convolución es **conmutativa**. Esta propiedad se da a continuación junto con las propiedades **asociativa** y **distributiva**.

$$v * w = w * v \qquad [2a]$$

$$v * (w * z) = (v * w) * z \qquad [2b]$$

$$v * (w + z) = (v * w) + (v * z) \qquad [2c]$$

Todas estas propiedades se deducen a partir de la ecuación (1).

Habiendo definido y examinado la operación de convolución, ahora se enuncian los dos **teoremas de convolución:**

$$v * w(t) \leftrightarrow V(f)W(f) \qquad [3]$$

$$v(t)w(t) \leftrightarrow V * W(f) \qquad [4]$$

Estos teoremas establecen que la convolución en el dominio del tiempo se convierte en multiplicación en el dominio de la frecuencia, mientras que la multiplicación en el dominio del tiempo se convierte en convolución en el dominio de la frecuencia. Ambas relaciones son importantes para el trabajo futuro.

La demostración de la ecuación (3) usa el teorema de retardo de tiempo en la forma siguiente:

$$\mathcal{F}[v * w(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)w(t-\lambda)\,d\lambda\right]e^{-j\omega t}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\lambda)e^{-j\omega t}\,dt\right]d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)[W(f)e^{-j\omega\lambda}]\,d\lambda$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)e^{-j\omega\lambda}\,d\lambda\right]W(f) = V(f)W(f)$$

La ecuación (4) se demuestra escribiendo la transformada de $v(t)w(t)$ y remplazando $w(t)$ por la integral de inversión $\mathcal{F}^{-1}[W(f)]$.

EJEMPLO 2.4-1 **Pulso trapezoidal**

Para ilustrar el teorema de convolución —y para obtener otro par de transformadas— tómese la convolución de los pulsos rectangulares de la figura 2.4-3*a*. Ésta es una tarea relativamente sencilla usando la interpretación gráfica y ciertas consideraciones de simetría. Si $\tau_1 > \tau_2$, el problema se divide en tres casos: sin traslape, con traslape parcial y con traslape completo. La figura 2.4-3*b* muestra $v(\lambda)$ y $w(t-\lambda)$ en un caso donde no hay traslape y $v * w(t) = 0$. Para esta región

$$t + \frac{\tau_2}{2} < -\frac{\tau_1}{2}$$

o

$$t < -\frac{(\tau_1 + \tau)}{2}$$

Hay una región correspondiente sin traslape donde $t - \tau_2/2 > \tau_1/2$, o $t > (\tau_1 + \tau_2)/2$. Combinando éstas da la región sin traslape como $|t| > (\tau_1 + \tau_2)/2$. En la región donde hay traslape parcial, $t + \tau_2/2 > -\tau_1/2$ y $t - \tau_2/2 < -\tau_1/2$, lo cual da

$$v * w(t) = \int_{-\frac{\tau_1}{2}}^{t+\frac{\tau_2}{2}} A_1A_2\,d\lambda = A_1A_2\left(t + \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right) \quad -\frac{\tau_1+\tau_2}{2} < t < -\frac{\tau_1-\tau_2}{2}$$

Por propiedades de simetría se encuentra que la otra región de traslape parcial es

$$v * w(t) = \int_{t-\frac{\tau_2}{2}}^{\frac{\tau_1}{2}} A_1A_2\,d\lambda = A_1A_2\left(-t + \frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right) \quad \frac{\tau_1-\tau_2}{2} < t < \frac{\tau_1+\tau_2}{2}$$

Finalmente, la convolución en la región de traslape total es

$$v * w(t) = \int_{t-\frac{\tau_2}{2}}^{t+\frac{\tau_2}{2}} A_1A_2\,d\lambda = A_1A_2\tau_2 \qquad |t| < \frac{\tau_1-\tau_2}{2}$$

El resultado es el pulso *trapezoidal* en la figura 2.4-3*c*, cuya transformada será el producto $V(f)W(f) = (A_1\tau_1 \operatorname{sinc} f\tau_1)(A_2\tau_2 \operatorname{sinc} f\tau_2)$.

Ahora se hace $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ y la forma trapezoidal se reduce al pulso *triangular* de la figura 2.3-4*a* con $A = A_1A_2\tau$. Correspondientemente, el espectro se convierte en $(A_1\tau_1 \operatorname{sinc} f\tau_1)(A_2\tau_2 \operatorname{sinc} f\tau_2) = A\tau \operatorname{sinc}^2 f\tau$, lo cual concuerda con el resultado previo.

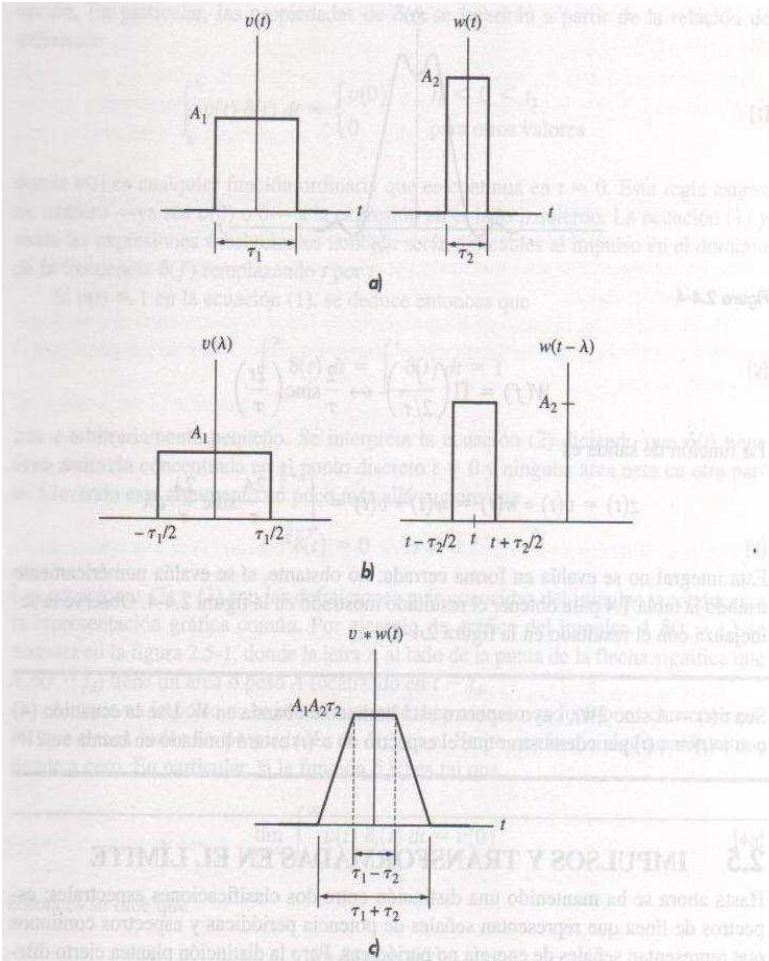


Figura 2.4-3 Convolución de pulsos rectangulares.

Filtro pasabajas ideal **EJEMPLO 2.4-2**

En la Sec. 2.1 se mencionó el impacto de las discontinuidades introducidas en una señal como un resultado de filtrar con un filtro ideal. Se examinará esto un poco más tomando la función rectangular del ejemplo 2.2-1 $v(t) = A\Pi(t/\tau)$, cuya transformada, $V(f) = A\tau \operatorname{sinc} f\tau$, existe para todos los valores de f. Se puede filtrar con un pasabajas esta señal en $f = 1/\tau$ multiplicando $V(f)$ por la función rectangular

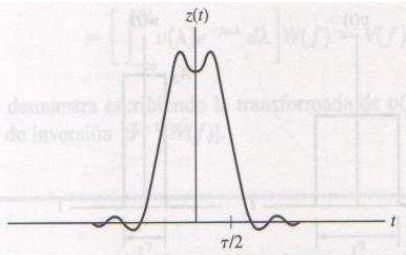


Figura 2.4-4

$$W(f) = \Pi\left(\frac{f}{2/\tau}\right) \leftrightarrow \frac{2}{\tau}\operatorname{sinc}\left(\frac{2t}{\tau}\right)$$

La función de salida es

$$z(t) = v(t) * w(t) = w(t) * v(t) = \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} \frac{2A}{\tau}\operatorname{sinc}\frac{2\lambda}{\tau}\,d\lambda$$

Esta integral no se evalúa en forma cerrada; no obstante, sí se evalúa numéricamente usando la tabla T.4 para obtener el resultado mostrado en la figura 2.4-4. Observe la semejanza con el resultado en la figura 2.1-9*b*.

EJERCICIO 2.4-1

Sea $v(t) = A$ sinc $2Wt$, cuyo espectro está limitado en banda en W. Use la ecuación (4) con $w(t) = v(t)$ para demostrar que el espectro de $v^2(t)$ estará limitado en banda en $2W$.

2.5 IMPULSOS Y TRANSFORMADAS EN EL LÍMITE

Hasta ahora se ha mantenido una distinción entre dos clasificaciones espectrales: espectros de línea que representan señales de potencia periódicas y espectros continuos que representan señales de energía no periódicas. Pero la distinción plantea cierto dilema cuando uno se encuentra con una señal conformada por términos periódicos *y* no periódicos. Se resolverá este dilema permitiendo **impulsos** en el dominio de la frecuencia para la representación de componentes de frecuencia discretos. La noción subyacente de **transformadas en el límite** también permite la representación de impulsos en el dominio del tiempo y de otras señales cuyas transformadas no existen en el sentido usual.

Propiedades del impulso unitario

El **impulso unitario** o **función delta de Dirac**, $\delta(t)$, no es una función en el sentido matemático estricto. Más bien, pertenece a una clase especial conocida como **funciones generalizadas** o **distribuciones**, cuyas definiciones se dan mediante reglas de asig-

mación. En particular, las propiedades de $\delta(t)$ se inferirán a partir de la relación de definición

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\delta(t)\,dt = \begin{cases} v(0) & t_1 < 0 < t_2 \\ 0 & \text{para otros valores} \end{cases} \quad [1]$$

donde $v(t)$ es cualquier función ordinaria que es continua en $t = 0$. Esta regla asigna un número —ya sea $v(0)$ o 0— a la expresión en el lado izquierdo. La ecuación (1) y todas las expresiones subsiguientes también serán aplicables al impulso en el dominio de la frecuencia $\delta(f)$ remplazando t por f.

Si $v(t) = 1$ en la ecuación (1), se deduce entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,dt = 1 \quad [2]$$

con ϵ arbitrariamente pequeño. Se interpreta la ecuación (2) diciendo que $\delta(t)$ tiene **área unitaria** concentrada en el punto discreto $t = 0$ y ninguna área neta en otra parte. Llevando este argumento un poco más allá sugiere que

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \quad [3]$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las definiciones más conocidas del impulso y conducen a la representación gráfica común. Por ejemplo, la gráfica del impulso $A\,\delta(t - t_d)$ se muestra en la figura 2.5-1, donde la letra A al lado de la punta de la flecha significa que $A\,\delta(t - t_d)$ tiene un área o peso A localizado en $t - t_d$.

Aunque un impulso no existe físicamente, hay numerosas funciones convencionales que tienen todas las propiedades de $\delta(t)$ en el límite conforme algún parámetro ϵ tiende a cero. En particular, si la función $\delta_\epsilon(t)$ es tal que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta_\epsilon(t)\,dt = v(0) \quad [4a]$$

entonces se dice que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t) = \delta(t) \quad [4b]$$

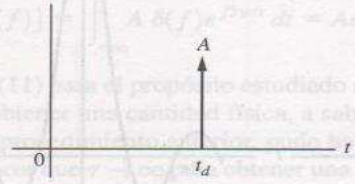


Figura 2.5-1 Representación gráfica de $A\delta(t - t_d)$.

Dos funciones que satisfacen la ecuación (4*a*) son

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\Pi\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad [5]$$

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}\,\text{sinc}\,\frac{t}{\epsilon} \quad [6]$$

las cuales se grafican en la figura 2.5-2. Se puede demostrar fácilmente que la ecuación (5) satisface la ecuación (4*a*) expandiendo $v(t)$ en una serie de Maclaurin antes de integrar. Posteriormente se dará una razón para la ecuación (6) cuando se consideren impulsos y transformadas.

Por definición, el impulso no tiene significado físico ni matemático, a menos que aparezca con la operación de integración. Dos de las propiedades de integración más significativas son

$$v(t) * \delta(t - t_d) = v(t - t_d) \quad [7]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta(t - t_d)\,dt = v(t_d) \quad [8]$$

las cuales se deducen a partir de la ecuación (1). La ecuación (7) es una operación de **réplica**, ya que la convolución de $v(t)$ con $\delta(t - t_d)$ reproduce la función completa $v(t)$ retardada por t_d. En contraste, la ecuación (8) es una operación de **muestreo** que escoge o muestrea el valor de $v(t)$ en $t = t_d$; el punto donde está "situado" el impulso $\delta(t - t_d)$.

Dada la especificación de que cualquier expresión con impulsos debe finalmente integrarse, es posible usar ciertas relaciones no integrales para simplificar expresiones *antes* de integrar. Dos de esas relaciones son

$$v(t)\,\delta(t - t_d) = v(t_d)\,\delta(t - t_d) \quad [9a]$$

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\,\delta(t) \qquad \alpha \neq 0 \quad [9b]$$

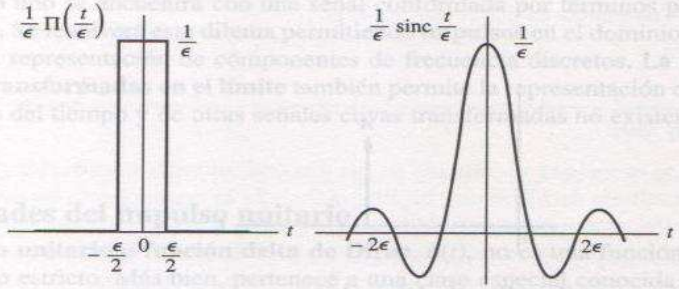


Figura 2.5-2 Dos funciones que se convierten en impulsos conforme $\epsilon \to 0$.

las cuales se justifican integrando ambos lados en el intervalo $-\infty < t < \infty$. La relación de producto en la ecuación (9*a*) simplemente redefine la propiedad de muestreo. La relación de cambio de escala en la ecuación (9*b*) establece que, en relación con la variable independiente t, $\delta(\alpha t)$ actúa como $\delta(t)/|\alpha|$. Haciendo $\alpha = -1$ pone de manifiesto la propiedad de simetría par $\delta(-t) = \delta(t)$.

EJERCICIO 2.5-1

Evalúese o simplifíquese cada una de las siguientes expresiones con $v(t) = (t-3)^2$:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,\delta(t+4)\,dt$; b) $v(t) * \delta(t+4)$; c) $v(t)\,\delta(t+4)$; d) $v(t) * \delta(-t/4)$.

Impulsos en frecuencia

Los impulsos en frecuencia representan fasores o constantes. En particular, sea $v(t) = A$ una constante para todo el tiempo. Aunque esta señal tiene energía infinita, se obtiene su transformada en la forma de un límite considerando que

$$v(t) = \lim_{W\to 0} A\,\text{sinc}\,2Wt = A \qquad [10a]$$

Pero ya se tiene el par de transformadas $A\,\text{sinc}\,2Wt \leftrightarrow (A/2W)\Pi(f/2W)$, de manera que

$$\mathcal{F}[v(t)] = \lim_{W\to 0} \frac{A}{2W}\,\Pi\left(\frac{f}{2W}\right) = A\,\delta(f) \qquad [10b]$$

la cual se deduce de la ecuación (5) $\epsilon = 2W$ y $t = f$. En consecuencia,

$$A \leftrightarrow A\,\delta(f) \qquad [11]$$

y el espectro de una constante en el dominio del tiempo es un impulso en el dominio de la frecuencia en $f = 0$.

Este resultado concuerda con la intuición de que una señal constante no tiene variación con el tiempo y su contenido espectral debe estar confinado en $f = 0$. La forma impulsiva resulta simplemente porque se usa la integración para regresar al dominio del tiempo, a través de la transformada inversa, y se requiere un impulso para concentrar el área diferente de cero en un punto discreto en frecuencia. Al verificar matemáticamente este argumento usando la ecuación (1) da

$$\mathcal{F}^{-1}[A\,\delta(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} A\,\delta(f)e^{j2\pi ft}\,dt = Ae^{j2\pi ft}\Big|_{f=0} = A$$

que justifica la ecuación (11) para el propósito estudiado aquí. Obsérvese que el impulso se ha integrado para obtener una cantidad física, a saber: la señal $v(t) = A$.

Como alternativa al procedimiento anterior, pudo haberse empezado con un pulso rectangular, $A\Pi(t/\tau)$, y hacer que $\tau \to \infty$ para obtener una constante para todo el tiempo. Entonces, como $\mathcal{F}[A\Pi(t/\tau)] = A\tau\,\text{sinc}\,f\tau$, el concordar con la ecuación (11) requiere que

$$\lim_{\tau\to\infty} A\tau\,\text{sinc}\,f\tau = A\,\delta(f)$$

Y esto apoya la afirmación anterior en la ecuación (6) de que una función sinc se convierte en un impulso bajo condiciones limitantes apropiadas.

Para generalizar la ecuación (11), la aplicación directa de los teoremas de traslación con frecuencia y de modulación da

$$Ae^{j\omega_c t} \leftrightarrow A\,\delta(f - f_c) \qquad [12]$$

$$A\cos(\omega_c t + \phi) \leftrightarrow \frac{Ae^{j\phi}}{2}\,\delta(f - f_c) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\,\delta(f + f_c) \qquad [13]$$

Así pues, el espectro de un solo fasor es un impulso en $f = f_c$, mientras que el espectro de una senoidal tiene dos impulsos, mostrados en la figura 2.5-3. Yendo todavía más allá en esta dirección, si $v(t)$ es una señal periódica arbitraria cuya serie de Fourier exponencial es

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)e^{j2\pi nf_0 t} \qquad [14a]$$

entonces su transformada de Fourier es

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)\,\delta(f - nf_0) \qquad [14b]$$

donde la superposición permite transformar la suma término por término.

Ahora debe ser obvio, de las ecuaciones (11)–(14), que cualquier espectro de línea bilateral puede convertirse en un espectro "continuo" usando esta regla: convierta las líneas espectrales en impulsos cuyos pesos sean iguales a las alturas de las líneas. La porción de fase del espectro de línea es absorbida haciendo que los pesos de los impulsos sean números complejos. Por tanto, con la ayuda de transformadas en el límite, se representan señales periódicas y no periódicas mediante espectros continuos. Esa extraña bestia que es la función impulso surge entonces como una clave para unificar el análisis espectral.

Uno se puede preguntar: ¿cuál es la diferencia entre el espectro de línea y el espectro "continuo" de una señal periódica? Obviamente no puede haber diferencia física; la diferencia está en las convenciones matemáticas. Para regresar al dominio del tiempo a partir del espectro de línea, se suman los fasores que representan las líneas. Para regresar al dominio del tiempo a partir del espectro continuo, se integran los impulsos para obtener fasores.

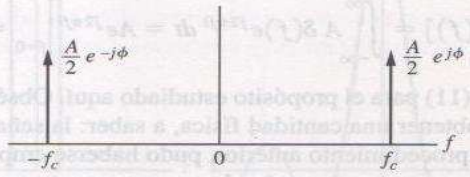


Figura 2.5-3 Espectro de $A\cos(\omega_c t + \phi)$.

EJEMPLO 2.5-1

La forma de onda senoidal de la figura 2.5-4*a* tiene frecuencia constante f_c, excepto por el intervalo $-1/f_c < t < 1/f_c$, donde la frecuencia salta a $2f_c$. Este tipo de señal podría producirse con el proceso de **modulación de frecuencia**, que se estudiará en el capítulo 5. Lo que interesa aquí es el espectro, el cual está formado por componentes tanto impulsivos como no impulsivos.

Para propósitos del análisis, se tomará $\tau = 2/f_c$ y se descompondrá $v(t)$ como una suma de tres términos en la forma siguiente:

$$v(t) = A\cos\omega_c t - A\Pi(t/\tau)\cos\omega_c t + A\Pi(t/\tau)\cos 2\omega_c t$$

Los dos primeros términos representan una onda coseno con un "agujero" para acomodar un pulso de RF con frecuencia $2f_c$, representado por el tercer término. Transformando $v(t)$ término por término da entonces

$$V(f) = \frac{A}{2}[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c)]$$

$$-\frac{A\tau}{2}[\text{sinc}\,(f-f_c)\tau + \text{sinc}\,(f+f_c)\tau]$$

$$+\frac{A\tau}{2}[\text{sinc}\,(f-2f_c)\tau + \text{sinc}\,(f+2f_c)\tau]$$

donde se han usado la ecuación (13) y los resultados del ejemplo 2.3-2. El espectro de amplitudes se grafica en la figura 2.5-4*b*, omitiendo la porción de frecuencias negativas. Obsérvese que $|V(f)|$ no es simétrica respecto de $f = f_c$ debido a que la componente no impulsiva debe incluir el término en $2f_c$.

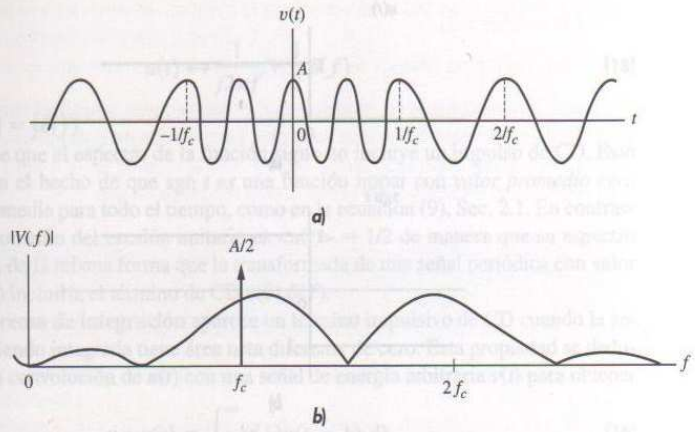


Figura 2.5-4 Forma de onda y espectro de amplitudes en el ejemplo 2.5-1.

Funciones escalón y signo

Se ha visto que una constante durante todo el tiempo se convierte en un impulso de CD en el dominio de la frecuencia. Considérese ahora la **función escalón unitario** de la figura 2.5-5*a*, la cual pasa de "desactivada" a "activada" en $t = 0$ y se define como

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad [15]$$

Esta función tiene múltiples usos en la teoría de Fourier, especialmente con respecto a señales **causales** ya que cualquier función del tiempo multiplicada por $u(t)$ será igual a cero para $t < 0$. Sin embargo, la falta de simetría crea un problema cuando se busca la transformada en el límite, debido a que las operaciones de tomar límites son equivalentes a las **integraciones de contorno** y deben realizarse en forma simétrica, como se hizo en la ecuación (10). Para evitar este problema, habrá que comenzar con la **función signo** graficada en la figura 2.5-5*b* y definida como

$$\text{sgn}\,t \triangleq \begin{cases} +1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \qquad [16]$$

que tiene claramente simetría impar.

La función signo es un caso límite de la señal de energía $z(t)$ de la figura 2.5-6, donde $v(t) = e^{-bt}u(t)$ y

$$z(t) = v(t) - v(-t) = \begin{cases} +e^{-bt} & t > 0 \\ -e^{+bt} & t < 0 \end{cases}$$

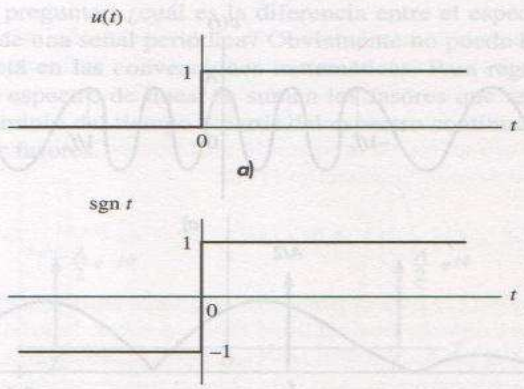


Figura 2.5-5 *a*) Función escalón unitario; *b*) función signo.

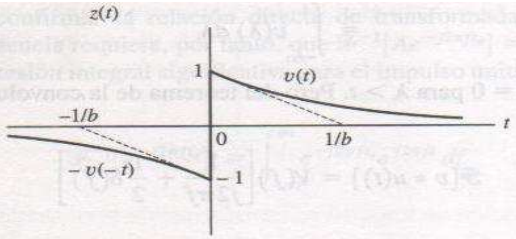


Figura 2.5-6

de modo que $z(t) \to \text{sgn } t$ si $b \to 0$. Combinando los resultados del ejemplo 2.2-2 y el ejercicio 2.3-1 da

$$\mathcal{F}[z(t)] = Z(f) = j2V_o(f) = \frac{-j4\pi f}{b^2 + (2\pi f)^2}$$

Por tanto,

$$\mathcal{F}[\text{sgn } t] = \lim_{b\to 0} Z(f) = \frac{-j}{\pi f}$$

y se tiene el par de transformadas

$$\text{sgn } t \leftrightarrow \frac{1}{j\pi f} \qquad [17]$$

Se observa entonces en la figura 2.5-5 que la función escalón y la función signo se relacionan por medio de

$$u(t) = \tfrac{1}{2}(\text{sgn } t + 1) = \tfrac{1}{2}\,\text{sgn } t + \tfrac{1}{2}$$

De aquí que

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f) \qquad [18]$$

ya que $\mathcal{F}[1/2] = \frac{1}{2}\delta(f)$.

Obsérvese que el espectro de la función signo no incluye un impulso de CD. Esto concuerda con el hecho de que sgn t *es* una función impar con *valor promedio cero* cuando se promedia para todo el tiempo, como en la ecuación (9), Sec. 2.1. En contraste, el valor promedio del escalón unitario es $\langle u(t)\rangle = 1/2$ de manera que su espectro incluye $\frac{1}{2}\delta(f)$, de la misma forma que la transformada de una señal periódica con valor promedio c(0) incluiría el término de CD $c(0)\,\delta(f)$.

En el **teorema de integración** aparece un término impulsivo de CD cuando la señal que está siendo integrada tiene área neta diferente de cero. Esta propiedad se deduce tomando la convolución de $u(t)$ con una señal de energía arbitraria $v(t)$ para obtener

$$v * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)u(t-\lambda)\,d\lambda \qquad [19]$$

$$= \int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\,d\lambda$$

puesto que $u(t-\lambda) = 0$ para $\lambda > t$. Pero del teorema de la convolución y la ecuación (18)

$$\mathcal{F}[v * u(t)] = V(f)\left[\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\,\delta(f)\right]$$

tal que

$$\int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\,d\lambda \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f}\,V(f) + \frac{1}{2}\,V(0)\,\delta(f) \qquad [20]$$

donde se aprovechó que $V(f)\,\delta(f) = V(0)\,\delta(f)$. La ecuación (20) se reduce al resultado previo del teorema de integración cuando $V(0) = 0$.

EJERCICIO 2.5-2 Aplíquese el teorema de modulación para obtener el espectro de la *senoidal causal* $v(t) = Au(t)\cos\omega_c t$.

Impulsos en el tiempo

Aunque el impulso en el dominio del tiempo $\delta(t)$ parece bastante extraño como un modelo de señal, se encontrarán muchas aplicaciones prácticas en capítulos subsiguientes. De igual importancia es el valor de $\delta(t)$ como un dispositivo analítico. Para deducir su transformada, se hace que $\tau \to 0$ in the known pair

$$\frac{A}{\tau}\,\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A\,\text{sinc}\,f\tau$$

el cual se convierte en

$$A\,\delta(t) \leftrightarrow A \qquad [21]$$

Por tanto, la transformada de un impulso en el tiempo tiene **amplitud constante,** lo que significa que su espectro contiene **todas las frecuencias en igual proporción.**

Se debe haber observado que $A\,\delta(t) \leftrightarrow A$ es la dual de $A \leftrightarrow A\,\delta(f)$. Esta relación dual cubre los dos extremos de la dispersión recíproca en que

> Una señal impulsiva con duración "cero" tiene ancho espectral infinito, mientras que una señal constante con duración infinita tiene "cero" ancho espectral.

Aplicando el teorema del retardo de tiempo a la ecuación (21), da el par más general

$$A\,\delta(t - t_d) \leftrightarrow Ae^{-j2\pi f t_d} \qquad [22]$$

Es muy sencillo confirmar la relación directa de transformadas $\mathcal{F}[A\delta(t - t_d)] = Ae^{-j2\pi ft_d}$; la consistencia requiere, por tanto, que $\mathcal{F}^{-1}[Ae^{-j2\pi ft_d}] = A\,\delta(t - t_d)$, lo cual conduce a una expresión integral significativa para el impulso unitario. Específicamente, puesto que

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-j2\pi ft_d}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft_d} e^{j2\pi ft}\, df$$

se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(t-t_d)}\, df = \delta(t - t_d) \qquad [23]$$

Así pues, la integral del lado izquierdo puede evaluarse como la forma límite del impulso unitario, un resultado que se pondrá a trabajar de inmediato en una demostración del teorema de la integral de Fourier.

Sea $v(t)$ be una función del tiempo continua con una transformada bien definida $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$. La tarea es demostrar que la transformada inversa es, en efecto, igual a $v(t)$. De las definiciones de las transformadas directa e inversa se escribe

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}[V(f)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)e^{-j2\pi f\lambda}\, d\lambda\right] e^{j2\pi ft}\, df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi(t-\lambda)f}\, df\right] d\lambda\end{aligned}$$

Pero la integral entre corchetes es igual a $\delta(t - \lambda)$, por la ecuación (23), de manera que

$$\mathcal{F}^{-1}[V(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,\delta(t - \lambda)\, d\lambda = v(t) * \delta(t) \qquad [24]$$

En consecuencia, $\mathcal{F}^{-1}[V(f)]$ es igual a $v(t)$ en el mismo sentido que $v(t) * \delta(t) = v(t)$. Una demostración más rigurosa, incluido el fenómeno de Gibbs en puntos de discontinuidad, la ofrece Papoulis (1962, capítulo 2).

Finalmente, el impulso unitario se relaciona con el **escalón unitario** mediante la integral

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda - t_d)\, d\lambda &= \begin{cases} 1 & t > t_d \\ 0 & t < t_d \end{cases} \qquad [25] \\ &= u(t - t_d)\end{aligned}$$

Diferenciando ambos lados da entonces

$$\delta(t - t_d) = \frac{d}{dt}u(t - t_d) \qquad [26]$$

que proporciona otra interpretación del impulso en función de la derivada de una discontinuidad escalonada.

Las ecuaciones (26) y (22), en conjunto con el teorema de diferenciación, facilitan ciertos cálculos de transformadas y ayudan a predecir una caída espectral en alta frecuencia de una señal. El método es el siguiente: se deriva la señal en cuestión repetidamente hasta que aparecen por primera vez una o más discontinuidades escalonadas. La derivada siguiente, digamos la *enésima*, incluye entonces un impulso $A_k\,\delta(t - t_k)$ por cada discontinuidad de altura A_k en $t = t_k$, de modo que

$$\frac{d^n}{dt^n}v(t) = w(t) + \sum_k A_k\,\delta(t - t_k) \qquad [27a]$$

donde $w(t)$ es una función no impulsiva. Transformando la ecuación (27*a*) da

$$(j2\pi f)^n V(f) = W(f) + \sum_k A_k\, e^{-j2\pi ft_k} \qquad [27b]$$

la cual se resuelve para $V(f)$ si conocemos $W(f) = \mathcal{F}[w(t)]$.

Además, si $|W(f)| \to 0$ conforme $f \to \infty$, el comportamiento en alta frecuencia de $|V(f)|$ será proporcional a $|f|^{-n}$ y se dice que el espectro tiene una **caída de orden enésimo.** Un valor grande de n implica entonces que la señal tiene muy poco contenido de alta frecuencia, una consideración importante en el diseño de muchos sistemas de comunicación.

EJEMPLO 2.5-2 **Pulso coseno elevado**

La figura 2.5–7*a* muestra una forma de onda denominada *pulso coseno elevado*, debido a que

$$v(t) = \frac{A}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi t}{\tau}\right)\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

Se usará el método de diferenciación para determinar el espectro de $V(f)$ y la caída en alta frecuencia. Las tres primeras derivadas de $v(t)$ se grafican en la figura 2.5–7*b*, y se ve que

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)\frac{A}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right)$$

que no tiene discontinuidades. Sin embargo, $d^2v(t)/dt^2$ es discontinua en $t = \pm\tau$, de modo que

$$\frac{d^3}{dt^3}v(t) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^3\frac{A}{2}\,\text{sen}\,\frac{\pi t}{\tau}\,\Pi\left(\frac{t}{2\tau}\right) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\,\delta(t + \tau) - \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\,\delta(t - \tau)$$

Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación (27*a*), pero a primera vista no se sabe la transformada del primer término.

Afortunadamente, una comparación de la primera y la tercera derivadas revela que el primer término de $d^3v(t)/dt^3$ puede escribirse como $w(t) = -(\pi/\tau)^2\, dv(t)/dt$. Por tanto, $W(f) = -(\pi/\tau)^2(j2\pi f)V(f)$ y la ecuación (27*b*) da

$$(j2\pi f)^3 V(f) = -\left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2(j2\pi f)V(f) + \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2\frac{A}{2}\left(e^{j2\pi f\tau} - e^{-j2\pi f\tau}\right)$$

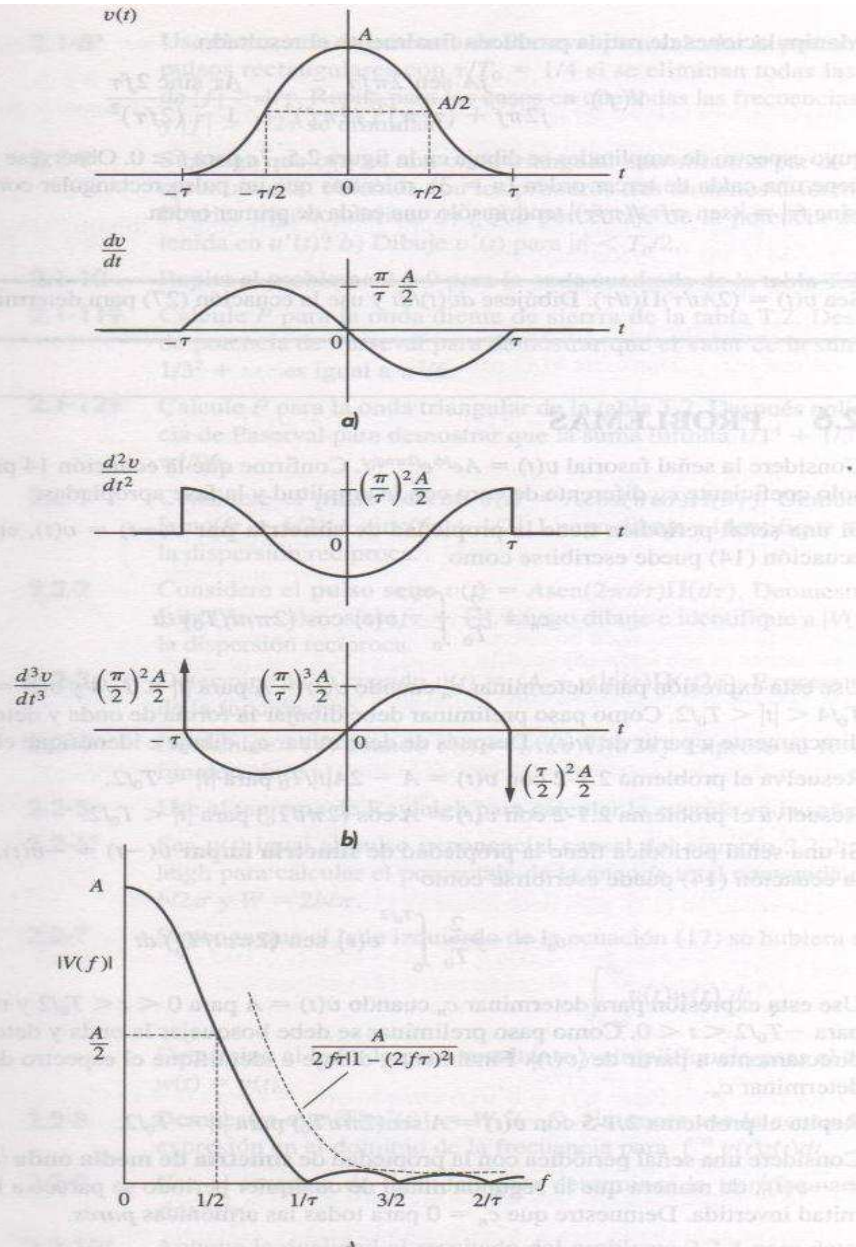


Figura 2.5-7 Pulso coseno elevado. *a*) Forma de onda; *b*) derivadas; *c*) espectro de amplitud.

Manipulaciones de rutina producen finalmente el resultado

$$V(f) = \frac{jA \text{ sen } 2\pi f\tau}{j2\pi f + (\tau/\pi)^2(j2\pi f)^3} = \frac{A\tau \text{ sinc } 2f\tau}{1 - (2f\tau)^2}$$

cuyo espectro de amplitudes se dibuja en la figura 2.5–7*c* para $f \geq 0$. Obsérvese que $|V(f)|$ tiene una caída de tercer orden ($n = 3$), mientras que un pulso rectangular con $|V(f)| = |\text{sinc } f\tau| = |(\text{sen } \pi f\tau)/(\pi f\tau)|$ tendría sólo una caída de primer orden.

EJERCICIO 2.5-3 Sea $v(t) = (2At/\tau)\Pi(t/\tau)$. Dibújese $dv(t)/dt$ y use la ecuación (27) para determinar $V(f)$.

2.6 PROBLEMAS

2.1-1 Considere la señal fasorial $v(t) = Ae^{j\phi}e^{j2\pi mf_0 t}$. Confirme que la ecuación 14 produce un solo coeficiente c_m diferente de cero con la amplitud y la fase apropiadas.

2.1-2 Si una señal periódica tiene la propiedad de **simetría par** $v(-t) = v(t)$, entonces la ecuación (14) puede escribirse como

$$c_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} v(t) \cos(2\pi nt/T_0)\, dt$$

Use esta expresión para determinar c_n cuando $v(t) = A$ para $|t| < T_0/4$ y $v(t) = -A$ para $T_0/4 < |t| < T_0/2$. Como paso preliminar debe dibujar la forma de onda y determinar c_0 directamente a partir de $\langle v(t)\rangle$. Después de determinar c_n, dibuje e identifique el espectro.

2.1-3 Resuelva el problema 2.1-2 con $v(t) = A - 2A|t|/T_0$ para $|t| < T_0/2$.

2.1-4 Resuelva el problema 2.1-2 con $v(t) = A \cos(2\pi t/T_0)$ para $|t| < T_0/2$.

2.1-5 Si una señal periódica tiene la propiedad de **simetría impar** $v(-t) = -v(t)$, entonces la ecuación (14) puede escribirse como

$$c_n = -j\frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} v(t) \text{ sen } (2\pi nt/T_0)\, dt$$

Use esta expresión para determinar c_n cuando $v(t) = A$ para $0 < t < T_0/2$ y $v(t) = -A$ para $-T_0/2 < t < 0$. Como paso preliminar se debe bosquejar la onda y determinar c_0 directamente a partir de $\langle v(t)\rangle$. Finalmente, dibuje e identifique el espectro después de determinar c_n.

2.1-6 Repita el problema 2.1-5 con $v(t) = A \text{ sen}(2\pi t/T_0)$ para $|t| < T_0/2$.

2.1-7‡ Considere una señal periódica con la propiedad de **simetría de media onda** $\langle v(t \pm T_0/2) = -v(t)\rangle$, de manera que la segunda mitad de cualquier periodo se parece a la primera mitad invertida. Demuestre que $c_n = 0$ para todas las armónicas *pares*.

2.1-8* Use el teorema de potencia de Parseval para calcular la potencia promedio en el tren de pulsos rectangulares con $\tau/T_0 = 1/4$ si se eliminan todas las frecuencias por encima de $|f| > 1/\tau$. Repita para los casos en que todas las frecuencias por encima de $|f| > 2/\tau$ y $|f| > 1/2\tau$ se eliminan.

2.1-9 Suponga que $v(t)$ es una onda triangular con simetría par de la tabla T.2 y sea $v'(t)$ la aproximación obtenida con los primeros tres términos diferentes de cero de la serie de Fourier trigonométrica. *a*) ¿Qué porcentaje de la potencia de la señal total está contenida en $v'(t)$? *b*) Dibuje $v'(t)$ para $|t| < T_0/2$.

2.1-10 Repita el problema 2.1-9 para la onda cuadrada de la tabla T.2.

2.1-11‡ Calcule P para la onda diente de sierrra de la tabla T.2. Después aplique el teorema de potencia de Parseval para demostrar que el valor de la suma infinita $1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + \cdots$ es igual a $\pi^2/6$.

2.1-12‡ Calcule P para la onda triangular de la tabla T.2. Después aplique el teorema de potencia de Paserval para demostrar que la suma infinita $1/1^4 + 1/3^4 + 1/5^4 + \cdots$ es igual a $\pi^4/96$.

2.2-1 Considere el **pulso coseno** $v(t) = A\cos(\pi t/\tau)\Pi(t/\tau)$. Demuestre que $V(f) = (A\tau/2)[\text{sinc}(f\tau - 1/2) + \text{sinc}(f\tau + 1/2]$. Luego dibuje e identifique a $|V(f)|$ para 0 y verifique la dispersión recíproca.

2.2-2 Considere el **pulso seno** $v(t) = A\text{sen}(2\pi t/\tau)\Pi(t/\tau)$. Demuestre que $V(f) = -j(A\tau/2)[\text{sinc}(f\tau - 1) - \text{sinc}(f\tau + 1)]$. Luego dibuje e identifique a $|V(f)|$ para $f \geq 0$ y verifique la dispersión recíproca.

2.2-3 Determine $V(f)$ cuando $v(t) = (A - A|t|/\tau)\Pi(t/2\tau)$. Exprese su resultado en términos de la función sinc.

2.2-4* Determine $V(f)$ cuando $v(t) = (At/\tau)\Pi(t/2\tau)$. Exprese su resultado en términos de la función sinc.

2.2-5 Use el teorema de Rayleigh para calcular la energía en la señal $v(t) = \text{sinc}2Wt$.

2.2-6* Sea $v(t)$ igual al pulso exponencial causal del ejemplo 2.2-2. Use el teorema de Rayleigh para calcular el porcentaje de la energía total contenida en $|f| < W$ cuando $W = b/2\pi$ y $W = 2b/\pi$.

2.2-7 Suponga que el lado izquierdo de la ecuación (17) se hubiera escrito como

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t)w(t)\,dt$$

Determine el lado derecho resultante y simplifíquelo para el caso en que $v(t)$ es real y $w(t) = v(t)$.

2.2-8 Demuestre que $\mathcal{F}[w^*(t)] = W^*(-f)$. Entonces use la ecuación (17) para obtener una expresión en el dominio de la frecuencia para $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)z(t)dt$.

2.2-9 Use el teorema de dualidad para determinar la transformada de Fourier de $v(t) = \text{sinc}2t/\tau$.

2.2-10* Aplique la dualidad al resultado del problema 2.2-1 para determinar $z(t)$ cuando $Z(f) = A\cos(\pi f/2W)\Pi(f/2W)$.

*Indica que la respuesta se proporciona en la última parte del libro.

2.2-11 Aplique la dualidad al resultado del problema 2.2-2 para determinar $z(t)$ cuando $Z(f) = -jA\text{sen}(\pi f/W)\Pi(f/2W)$.

2.2-12‡ Use la ecuación (16) y un par de transformadas conocidas para demostrar que

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-2}\,dx = \pi/4a^3$$

2.3-1* Sea $v(t)$ el pulso rectangular en la figura 2.2-1*a*. Determine y dibuje $Z(f)$ para $z(t) = v(t - T) + v(t + T)$ tomando $\tau \ll T$.

2.3-2 Repita el problema 2.3-1 para $z(t) = v(t - 2T) + 2v(t) + v(t + 2T)$.

2.3-3 Repita el problema 2.3-1 para $z(t) = v(t - 2T) - 2v(t) + v(t + 2T)$.

2.3-4 Grafique $v(t)$ y determine $V(f)$ para

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right) + B\Pi\left(\frac{t - 3T/2}{T}\right)$$

2.3-5 Grafique $v(t)$ y determine $V(f)$ para

$$v(t) = A\Pi\left(\frac{t - 2T}{4T}\right) + B\Pi\left(\frac{t - 2T}{2T}\right)$$

2.3-6* Determine $Z(f)$ en términos de $V(f)$ cuando $z(t) = v(at - t_d)$.

2.3-7 Demuestre la ecuación (6) (p. 48).

2.3-8 Use la ecuación (7) para obtener el par de transformadas en el problema 2.2-1.

2.3-9 Use la ecuación (7) para obtener el par de transformadas en el problema 2.2-2.

2.3-10 Use la ecuación (7) para determinar $Z(f)$ cuando $z(t) = Ae^{-|t|}\cos\omega_c t$.

2.3-11 Use la ecuación (7) para determinar $Z(f)$ cuando $z(t) = Ae^{-t}\,\text{sen}\,\omega_c t$ para $t \geq 0$ y $z(t) = 0$ para $t < 0$.

2.3-12 Use la ecuación (12) para resolver el problema 2.2-4.

2.3-13* Use la ecuación (12) para determinar $Z(f)$ cuando $z(t) = Ate^{-b|t|}$.

2.3-14 Use la ecuación (12) para determinar $Z(f)$ cuando $z(t) = At^2e^{-t}$ para $t \geq 0$ y $z(t) = 0$ para $t < 0$.

2.3-15 Considere el pulso gaussiano de la tabla T.1. Genere un nuevo par de transformadas mediante: *a*) la aplicación de la ecuación (8) con $n = 1$; *b*) aplicando la ecuación (12) con $n = 1$.

2.4-1 Determine y grafique $y(t) = v^*w(t)$ cuando $v(t) = t$ para $0 < t < 2$ y $w(t) = A$ para $t > 0$. Ambas señales son iguales a cero fuera de los intervalos especificados.

2.4-2* Repita el problema 2.4-1 con $w(t) = A$ para $0 < t < 3$.

2.4-3 Repita el problema 2.4-1 con $w(t) = A$ para $0 < t < 1$.

2.4-4 Determine y grafique $y(t) = v^*w(t)$ cuando $v(t) = 2\Pi(\frac{t-1}{2})$, $w(t) = A$ para $t \geq 4$, y $w(t) = 0$ para otros valores de t.

2.4-5 Repita el problema 2.4-4 con $w(t) = e^{-2t}$ para $t > 0$ y $w(t) = 0$ para otros valores de t.

2.4-6 Repita el problema 2.4-4 con $w(t) = \Lambda(\frac{t}{\tau})$.

2.4-7* Determine $y(t) = v^*w(t)$ para $v(t) = Ae^{-at}$ para $t > 0$ y $w(t) = Be^{-bt}$ para $t > 0$. Ambas señales son iguales a cero fuera de los intervalos especificados.

2.4-8 Repita el problema 2.4-7 con $w(t) = \text{sin } \pi t$ for $0 \leq t \leq 2$, $w(t) = 0$ para otros valores de t. (*Sugerencia*: exprese la senoidal como una suma de exponenciales.)

2.4-9 Demuestre la ecuación (2*a*) a partir de la ecuación (1) (p. 53).

2.4-10 Suponga que $v(t)$ y $w(t)$ tienen simetría par. Demuestre a partir de la ecuación (1) que $v^*w(t)$ tendrá simetría par.

2.4-11 Suponga que $v(t)$ y $w(t)$ tienen simetría impar. Demuestre a partir de la ecuación (1) que $v^*w(t)$ tendrá simetría impar.

2.4-12 Determine y grafique v^*v^*v cuando $v(t) = \Pi(\frac{t}{\tau})$. Se puede usar la propiedad de simetría expresada en el problema 2.4-10.

2.4-13 Use la ecuación (3) para demostrar la ecuación (2*b*) (p. 55).

2.4-14* Determine y grafique $y(t) = v^*w(t)$ cuando $v(t) = \text{sinc } 4t$ y $w(t) = 2 \text{ sinc } \frac{t}{2}$.

2.5-1 Considere la señal $z(t)$ y su transformada $Z(f)$ del ejemplo 2.3-2. Determine $z(t)$ y $Z(f)$ conforme $\tau \to 0$.

2.5-2 Sea $v(t)$ una señal periódica cuyos coeficientes de Fourier se indican mediante $c_v(nf_0)$. Use la ecuación (14) y un teorema de transformadas apropiado para expresar $c_w(nf_0)$ en función de $c_v(nf_0)$ cuando $w(t) = v(t - t_d)$.

2.5-3 Repita el problema 2.5-2 con $w(t) = dv(t)/dt$.

2.5-4‡ Repita el problema 2.5-2 con $w(t) = v(t) \cos m\omega_0 t$.

2.5-5* Sea $v(t) = A$ para $0 < t < 2\tau$ y $v(t) = 0$ para otros valores de t. Use la ecuación (18) a fin de determinar $V(f)$. Verifique su resultado escribiendo $v(t)$ en términos de la función rectángulo.

2.5-6 Sea $v(t) = A$ para $|t| > \tau$ and $v(t) = 0$ para otros valores de t. Use la ecuación (18) a fin de determinar $V(f)$. Verifique su resultado escribiendo $v(t)$ en términos de la función rectángulo.

2.5-7 Sea $v(t) = A$ para $t < -T$, y $v(t) = -A$ para $t > T$, y $v(t) = 0$ para otros valores de t. Use la ecuación (18) y determine $V(f)$. Verifique su resultado haciendo que $T \to 0$.

2.5-8 Sea

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\lambda)\, d\lambda$$

con $v(t) = (1/\epsilon)\Pi(t/\epsilon)$. Grafique $w(t)$ y use la ecuación (20) para determinar $W(f)$. Después haga que $\epsilon \to 0$ y compare sus resultados con la ecuación (18).

2.5-9 Repita el problema 2.5-8 con $v(t) = (1/\epsilon)e^{-t/\epsilon}\, u(t)$.

2.5-10 Obtenga la transformada de la señal en el problema 2.3-1 expresando $z(t)$ como la convolución de $v(t)$ con impulsos.

2.5-11* Repita el problema 2.5-10 para la señal en el problema 2.3-2.

2.5-12 Repita el problema 2.5-10 para la señal en el problema 2.3-3.

2.5-13* Determine y dibuje la señal $v(t) = \sum_{n=0}^{8} \text{sen } (2\pi t)\delta(t - 0.5n)$ usando la ecuación (9*a*).

2.5-14 Determine y dibuje la señal $v(t) = \sum_{n=-10}^{10} \cos (2\pi t)\delta(t - 0.1n)$ usando la ecuación (9*a*).

capítulo

3

Transmisión y filtrado de señales

RESUMEN DEL CAPÍTULO

3.1 **Respuesta de sistemas LIT**
La respuesta al impulso y la integral de superposición Funciones de transferencia y respuesta en frecuencia Análisis con diagramas de bloques

3.2 **Distorsión de la señal en la transmisión**
Transmisión sin distorsión Distorsión lineal Compensación Distorsión no lineal y compansión

3.3 **Pérdidas de transmisión y decibeles**
Ganancia de potencia Pérdidas en la transmisión y repetidores Fibra óptica Transmisión de radio★

3.4 **Filtros y filtrado**
Filtros ideales Limitación en banda y limitación en tiempo Filtros reales Respuesta al pulso y tiempo de subida

3.5 **Filtros de cuadratura y transformada de Hilbert**

3.6 **Correlación y densidad espectral**
Correlación de señales de potencia Correlación de señales de energía Funciones de densidad espectral

La transmisión de señales es el proceso mediante el cual una forma de onda eléctrica va de un lugar a otro e, idealmente, llega sin distorsión. En contraste, el filtrado de señales es una operación que deliberadamente distorsiona una forma de onda alterando su contenido espectral. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de transmisión y los filtros comparten las propiedades de linealidad e invariabilidad en el tiempo. Estas propiedades permiten modelar la transmisión y el filtrado en el dominio del tiempo en función de la respuesta al impulso, o bien en el dominio de la frecuencia en función de la respuesta en frecuencia.

Este capítulo comienza con una consideración general acerca de la respuesta del sistema en ambos dominios. Después se aplicarán los resultados al análisis de la transmisión y a la distorsión de señales para una variedad de medios y sistemas tales como fibra óptica y satélites. Se examinará el uso de diferentes tipos de filtros y filtrados en los sistemas de comunicación. Se incluyen asimismo algunos temas relacionados —principalmente pérdidas en la transmisión, transformadas de Hilbert y correlación— como puntos de arranque para un desarrollo posterior.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, usted será capaz de hacer lo siguiente:

1. Expresar y aplicar las relaciones de entrada-salida para un sistema LIT en función de su respuesta al impulso $h(t)$, su respuesta al escalón $g(t)$, o a su función de transferencia $H(f)$ (Sec. 3.1).
2. Usar el análisis en el dominio de la frecuencia para obtener una expresión exacta o aproximada de la salida de un sistema (Sec. 3.1).
3. Determinar $H(f)$ a partir del diagrama de bloques de un sistema sencillo (Sec. 3.1).
4. Distinguir entre distorsión de amplitud, distorsión de retardo, distorsión lineal y distorsión no lineal (Sec. 3.2).
5. Identificar las bandas de frecuencia que producen transmisión sin distorsión para un canal dado y determinar la compensación necesaria para la transmisión sin distorsión en una banda especificada (Sec. 3.2).
6. Usar cálculos con dB para determinar la potencia de señales en un sistema de transmisión por cable con amplificadores.
7. Analizar las características y los requerimientos para la transmisión por medio de sistemas de fibra óptica y satelitales (Sec. 3.3).
8. Identificar las características y graficar $H(f)$ y $h(t)$ para un LPF, BPF o HPF ideales (Sec. 3.4).
9. Determinar el ancho de banda de 3 dB de un LPF real, dada $H(f)$ (Sec. 3.4).
10. Expresar y aplicar los requerimientos de ancho de banda para transmisión de pulsos (Sec. 3.4).
11. Expresar y aplicar las propiedades de la transformada de Hilbert (Sec. 3.5).
12. Definir las funciones de correlación cruzada y de autocorrelación para señales de energía o de potencia y expresar sus propiedades (Sec. 3.6).
13. Expresar el teorema de Wiener-Kinchine y las propiedades de funciones de densidad espectral (Sec. 3.6).
14. Dadas $H(f)$ y la correlación de entrada o la función de densidad espectral, determinar la correlación de salida o bien la densidad espectral.

3.1 RESPUESTA DE SISTEMAS LIT

La figura 3.1-1 muestra un sistema dentro de una "caja negra" con una **señal de entrada $x(t)$** y una **señal de salida $y(t)$**. En el contexto de las comunicaciones eléctricas, el sistema estaría formado normalmente por una red de dos puertos excitada por un voltaje o una corriente aplicada en el puerto de entrada, produciendo así otro voltaje o corriente en el puerto de salida. Los elementos que almacenan energía y otros efectos

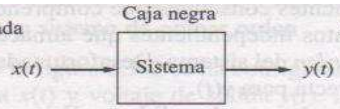


Figura 3.1-1

internos pueden hacer que la forma de onda de la salida parezca muy diferente de la forma de la entrada. Pero, independientemente de lo que está en la caja, el sistema se caracteriza por una relación de **excitación y respuesta** entre la entrada y la salida.

Aquí se ocupará uno de la clase especial de sistemas **lineales e invariantes en el tiempo** o sistemas LIT. Se desarrollará la relación de entrada-salida en el dominio del tiempo usando la integral de superposición y la respuesta al impulso del sistema. Así, se comenzará con el análisis en el dominio de la frecuencia expresado en términos de la función de transferencia del sistema.

La respuesta al impulso y la integral de superposición

Supóngase que el sistema de la figura 3.1-1 es un sistema LIT que no tiene energía inicial almacenada en el momento en que se aplica la entrada $x(t)$. La salida $y(t)$ es entonces la **respuesta forzada** atribuida completamente a $x(t)$, lo que se representa por

$$y(t) = F[x(t)] \qquad [1]$$

donde $F[x(t)]$ representa la relación funcional entre la entrada y la salida. La propiedad **lineal** significa que la ecuación (1) obedece el **principio de superposición**. Así, si

$$x(t) = \sum_k a_k x_k(t) \qquad [2a]$$

donde las a_k son constantes, entonces

$$y(t) = \sum_k a_k F[x_k(t)] \qquad [2b]$$

La propiedad de **invariabilidad en el tiempo** significa que las características del sistema permanecen **fijas en el tiempo**. Así que una entrada desplazada en el tiempo $x(t - t_d)$ produce

$$F[x(t - t_d)] = y(t - t_d) \qquad [3]$$

de modo que la salida está desplazada en el tiempo, pero no se ve alterada de ninguna otra forma.

La mayoría de los sistemas LIT están formados completamente por elementos de **parámetros concentrados** (por ejemplo, resistores capacitores e inductores), a diferencia de elementos con fenómenos distribuidos espacialmente (como en líneas de transmisión). El análisis directo de un sistema de parámetros concentrados comienza con las ecuaciones de los elementos y conduce a la relación de entrada-salida como una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \qquad [4]$$

donde las a y las b son coeficientes constantes que comprenden los valores de los elementos. El número de elementos independientes que almacenan energía determina el valor de n y se conoce como *orden* del sistema. Desafortunadamente, la ecuación (4) no proporciona una expresión directa para $y(t)$.

Para obtener una ecuación de entrada-salida explícita, se debe definir primero la **respuesta al impulso** del sistema

$$h(t) \triangleq F[\delta(t)] \qquad [5]$$

la cual es igual a la respuesta forzada cuando $x(t) = \delta(t)$. Sin embargo, es posible escribir cualquier señal de entrada continua como la convolución $x(t) = x(t) * \delta(t)$, de modo que

$$y(t) = F\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\delta(t - \lambda)\, d\lambda\right]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) F[\delta(t - \lambda)]\, d\lambda$$

en la cual se permite el intercambio de operaciones en virtud de la linealidad del sistema. Ahora, con base en la propiedad de invariabilidad en el tiempo, $F[\delta(t - \lambda)] = h(t - \lambda)$ y por ende

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda)\, d\lambda \qquad [6a]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) x(t - \lambda)\, d\lambda \qquad [6b]$$

donde se utilizó la conmutabilidad de la convolución.

Cualquiera de las formas de la ecuación (6) se denomina **integral de superposición**. Ésta expresa la respuesta forzada como una convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta al impulso $h(t)$. El análisis de sistemas en el dominio del tiempo requiere, por tanto, del conocimiento de la respuesta al impulso y de la habilidad para calcular la convolución.

Existen varias técnicas para determinar $h(t)$ a partir de la ecuación diferencial o de algún otro modelo del sistema, pero es más sencillo tomando $x(t) = u(t)$ y calculando la **respuesta al escalón** del sistema

$$g(t) \triangleq F[u(t)] \qquad [7a]$$

a partir de la cual

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \qquad [7b]$$

Esta relación de derivada entre la respuesta al impulso y al escalón se deduce a partir de la propiedad general de la convolución

$$\frac{d}{dt}[v * w(t)] = v(t) * \left[\frac{dw(t)}{dt}\right]$$

Así que, como $g(t) = h * u(t)$ por definición, $dg(t)/dt = h(t) * [du(t)/dt] = h(t) * \delta(t) = h(t)$.

Respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden

El circuito *RC* sencillo de la figura 3.1-2 se ha configurado como una red de dos puertos con voltaje de entrada $x(t)$ y voltaje de salida $y(t)$. Las polaridades de referencia para los voltajes se indican mediante la notación $+/-$ y se supone que el signo $+$ indica el potencial mayor. Este circuito es un sistema de primer orden regido por la ecuación diferencial

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

En vista de que algunas expresiones similares describen ciertas líneas y cables de transmisión, existe un interés particular en la respuesta del sistema.

Con base en la ecuación diferencial o en el diagrama del circuito, la respuesta al escalón se determina fácilmente y es

$$g(t) = (1 - e^{-t/RC})u(t) \qquad [8a]$$

Interpretado físicamente, el capacitor comienza con un voltaje inicial igual a cero y se carga hacia $y(\infty) = 1$ con constante de tiempo RC cuando $x(t) = u(t)$. La figura 3.1-3*a* muestra este comportamiento, en tanto que la figura 3.1-3*b* muestra la respuesta al impulso correspondiente

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t) \qquad [8b]$$

obtenida al diferenciar $g(t)$. Observe que $g(t)$ y $h(t)$ son formas de onda *causales* puesto que la entrada es igual a cero para $t < 0$.

La respuesta a una entrada arbitraria $x(t)$ se determina ahora colocando la ecuación (8*b*) en la integral de superposición. Por ejemplo, tómese el caso de un pulso rectangular aplicado en $t = 0$, tal que $x(t) = A$ para $0 < t < \tau$. La convolución $y(t) = h * x(t)$ se divide en tres partes, como en el ejemplo de la figura 2.4-1 con el resultado de que

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A(1 - e^{-t/RC}) & 0 < t < \tau \\ A(1 - e^{-\tau/RC})e^{-(t-\tau)/RC} & t > \tau \end{cases} \qquad [9]$$

como se grafica en la figura 3.1-4 para tres valores de τ/RC.

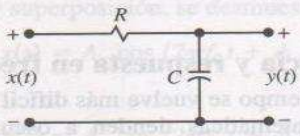


Figura 3.1-2 Filtro RC pasabajas.

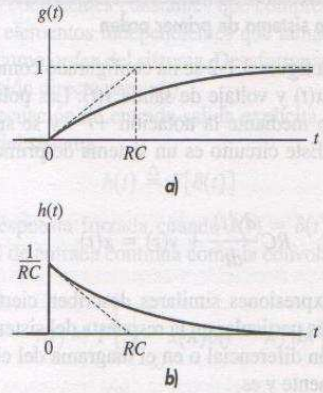


Figura 3.1-3 Salida de un filtro RC pasabajas. *a*) Respuesta al escalón; *b*) respuesta al impulso.

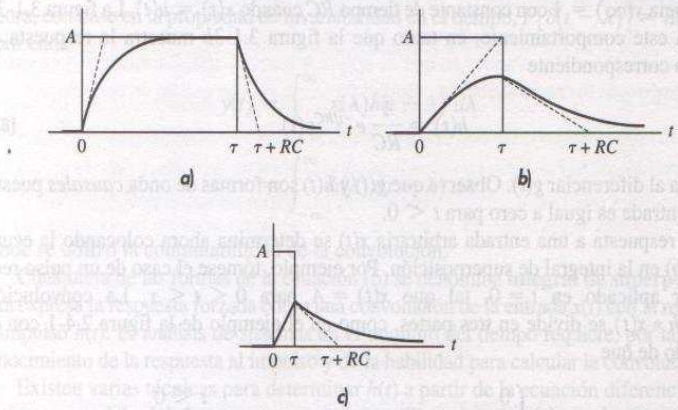


Figura 3.1-4 Respuesta a un pulso rectangular de un filtro RC de pasabajas. *a*) $\tau \gg$ RC; *b*) $\tau \approx$ RC; *c*) $\tau \ll$ RC.

EJERCICIO 3.1-1 Intercámbiese el resistor y el capacitor de la figura 3.1-2 y determínese la respuesta al escalón y la respuesta al impulso.

Funciones de transferencia y respuesta en frecuencia

El análisis en el dominio del tiempo se vuelve más difícil para sistemas de orden más alto y las complicaciones matemáticas tienden a oscurecer puntos significativos.

Empero, si uno se traslada al dominio de la frecuencia se obtendrá una visión diferente y a menudo mucho más clara de la respuesta del sistema. Como primer paso en esta dirección, se define la **función de transferencia** del sistema como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso, vale decir,

$$H(f) \triangleq \mathcal{F}[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}\,dt \qquad [10]$$

Esta definición requiere que $H(f)$ exista, por lo menos en un sentido de límite. En el caso de un sistema **inestable**, $h(t)$ **crece con el tiempo** y $H(f)$ no existe.

Cuando $h(t)$ es una función del tiempo *real*, $H(f)$ tiene la simetría de Hermite

$$H(-f) = H^*(f) \qquad [11a]$$

tal que

$$|H(-f)| = |H(f)| \qquad \arg H(-f) = -\arg H(f) \qquad [11b]$$

Se supondrá que esta propiedad siempre se cumple, a menos que se diga lo contrario.

La interpretación en el dominio de la frecuencia de la función de transferencia proviene de $y(t) = h * x(t)$ con una entrada *fasorial*, digamos

$$x(t) = A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \qquad -\infty < t < \infty \qquad [12a]$$

La estipulación de que $x(t)$ persiste todo el tiempo significa que se está tratando con condiciones de *estado estable* igual que en el caso conocido del análisis de circuitos en estado estable de CA. La respuesta forzada en estado estable es

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0(t-\lambda)}\,d\lambda \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)e^{-j2\pi f_0\lambda}d\lambda\right] A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \\ &= H(f_0)A_x e^{j\phi_x} e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}$$

donde, de la ecuación (10), $H(f_0)$ es igual a $H(f)$ con $f = f_0$. Convirtiendo $H(f_0)$ a la forma polar, se obtiene

$$y(t) = A_y e^{j\phi_y} e^{j2\pi f_0 t} \qquad -\infty < t < \infty \qquad [12b]$$

en la que se han identificado la amplitud y el ángulo del fasor en la salida como

$$A_y = |H(f_0)|A_x \qquad \phi_y = \arg H(f_0) + \phi_x \qquad [13]$$

Usando fasores conjugados y superposición, se desmuestra también que si

$$x(t) = A_x \cos(2\pi f_0 t + \phi_x)$$

entonces

$$y(t) = A_y \cos(2\pi f_0 t + \phi_y)$$

con A_y y ϕ_y igual que en la ecuación (13).

Puesto que $A_y/A_x = |H(f_0)|$ para cualquier frecuencia f_0, se concluye que $|H(f)|$ representa la **razón de amplitud** del sistema en función de la frecuencia (denominada algunas veces **respuesta de amplitud** o **ganancia**). Por la misma razón, $H(f)$ representa el **desplazamiento de fase**, puesto que $\phi_y - \phi_x = \arg H(f_0)$. Los gráficos de $|H(f)|$ y de $H(f)$ versus la frecuencia dan la representación del sistema en el dominio de la frecuencia o, de modo equivalente, la **respuesta en frecuencia** del sistema. De aquí en adelante se hará referencia a $H(f)$ como la función de transferencia o como la función de respuesta en frecuencia.

Ahora, sea $x(t)$ cualquier señal con espectro $X(f)$. Utilizando el teorema de la convolución, se toma la transformada de $y(t) = h * x(t)$ para obtener

$$Y(f) = H(f)X(f) \qquad [14]$$

Este resultado, elegantemente sencillo, constituye la base del análisis de sistemas en el dominio de la frecuencia y establece que

El espectro de salida $Y(f)$ es igual al espectro de entrada $X(f)$ multiplicado por la función de transferencia $H(f)$.

Los espectros correspondientes de amplitud y de fase son

$$\begin{aligned} |Y(f)| &= |H(f)||X(f)| \\ \arg Y(f) &= \arg H(f) + \arg X(f) \end{aligned}$$

los cuales son comparables con las expresiones para una sola frecuencia de la ecuación (13). Si $x(t)$ es una señal de energía, entonces $y(t)$ será una señal de energía cuya densidad espectral y energía total están dadas por

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2 \qquad [15a]$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2|X(f)|^2\,df \qquad [15b]$$

como se deduce a partir del teorema de la energía de Rayleigh.

La ecuación (14) ofrece un indicio nuevo sobre el significado de la función de transferencia del sistema y el par de transformadas $h(t) \leftrightarrow H(f)$, ya que si se toma $x(t)$ como el impulso unitario, entonces $X(f) = 1$ y $Y(f) = H(f)$, acorde con la definición $y(t) = h(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$. Desde el punto de vista del dominio de la frecuencia, el espectro de entrada "plano" $X(f) = 1$ contiene todas las frecuencias en igual proporción y, en consecuencia, el espectro de salida toma la forma de la función de transferencia $H(f)$.

La figura 3.1-5 resume las relaciones de entrada-salida en ambos dominios. Desde luego, cuando se dan $H(f)$ y $X(f)$ es mucho más fácil determinar el espectro de salida $Y(f)$ que la señal de salida $y(t)$. En principio, podría calcularse $y(t)$ a partir de la transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)X(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)X(f)e^{j2\pi ft}\,df$$

Pero esta integración no ofrece necesariamente ventajas sobre la convolución en el dominio del tiempo. En realidad, la capacidad explicativa del análisis de sistemas en el dominio

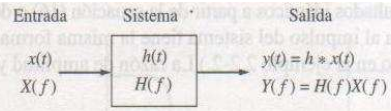


Figura 3.1-5 Relaciones de entrada-salida para un sistema LIT.

de la frecuencia depende principalmente de que se permanezca en ese dominio y del conocimiento de las propiedades espectrales para hacer inferencias sobre la señal de salida.

Finalmente, se señalarán dos formas de determinar $H(f)$ que no incluyen $h(t)$. Si se conoce la *ecuación diferencial* para un sistema de parámetros concentrados, se puede escribir inmediatamente su función de transferencia como el cociente de polinomios

$$H(f) = \frac{b_m(j2\pi f)^m + \cdots + b_1(j2\pi f) + b_0}{a_n(j2\pi f)^n + \cdots + a_1(j2\pi f) + a_0} \qquad [16]$$

cuyos coeficientes son los mismos que los de la ecuación (4). La ecuación (16) se obtiene de la transformación de Fourier de la ecuación (4).

O bien, si se calcula la **respuesta fasorial en estado estable** de un sistema, las ecuaciones (12) y (13) muestran que

$$H(f) = \frac{y(t)}{x(t)} \quad \text{cuando} \quad x(t) = e^{j2\pi ft} \qquad [17]$$

Este método corresponde al análisis de impedancia en los circuitos eléctricos, pero también es válido para cualquier sistema LIT. Por otra parte, la ecuación (17) puede considerarse un caso especial de la función de transferencia $H(s)$ en el dominio de s usada en conjunción con la transformada de Laplace. Puesto que en general $s = \sigma + j\omega$, $H(f)$ se obtiene a partir de $H(s)$ simplemente haciendo $s = j2\pi f$. Estos métodos suponen, por supuesto, que el sistema es estable.

Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden EJEMPLO 3.1-2

El circuito RC del ejemplo 3.1-1 se ha dibujado de nuevo en la figura 3.1-6*a* con las impedancias $Z_R = R$ y $Z_C = 1/j\omega C$ remplazando los elementos. Puesto que $y(t)/x(t) = Z_C/(Z_C + Z_R)$ cuando $x(t) = e^{j\omega t}$, la ecuación (17) da

$$H(f) = \frac{(1/j2\pi fC)}{(1/j2\pi fC) + R} = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

$$= \frac{1}{1 + j(f/B)} \qquad [18a]$$

donde se introdujo el parámetro del sistema

$$B \triangleq \frac{1}{2\pi RC} \qquad [18b]$$

Se habrían obtenido resultados idénticos a partir de la ecuación (16) o de $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$. (De hecho, la respuesta al impulso del sistema tiene la misma forma que el pulso exponencial causal discutido en el ejemplo 2.2-2.) La razón de amplitud y el desplazamiento de fase son

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/B)^2}} \qquad \arg H(f) = -\arctan\frac{f}{B} \qquad [18c]$$

como se grafica en la figura 3.1-6*b* para $f \geq 0$. La simetría de Hermite permite omitir $f < 0$ sin pérdida de información.

La razón de amplitud $|H(f)|$ tiene un significado especial respecto de cualesquiera propiedades *selectivas de frecuencia* del sistema. Este sistema, en particular, se llama **filtro pasabajas** porque casi no tiene efecto sobre la amplitud de las componentes de baja frecuencia, digamos para $|f| \ll B$, mientras que reduce drásticamente la amplitud de las componentes de alta frecuencia, digamos para $|f| \gg B$. El parámetro B sirve como medida de la **banda de paso** o **ancho de banda** del filtro.

Para ilustrar hasta dónde se puede avanzar con el análisis en el dominio de la frecuencia, sea la entrada $x(t)$ una señal arbitraria cuyo espectro tiene un contenido despreciable para $|f| > W$. Hay tres casos posibles que se deben considerar, dependiendo de los valores relativos de B y W:

1. Si $W \ll B$, como se muestra en la figura 3.1-7*a*, entonces $|H(f)| \approx 1$ y $\arg H(f) \approx 0$ en la banda de frecuencias de la señal $|f| < W$. Así que $Y(f) = H(f)X(f) \approx X(f)$ y $y(t) \approx x(t)$, y se tiene **transmisión sin distorsión** a través del filtro.
2. Si $W \approx B$, como se muestra en la figura 3.1-7*b*, entonces $Y(f)$ depende tanto de $H(f)$ como de $X(f)$. Se dice entonces que la salida está **distorsionada** puesto que $y(t)$ diferirá significativamente de $x(t)$, pero se requerirían cálculos en el dominio del tiempo para determinar la forma de la onda real.

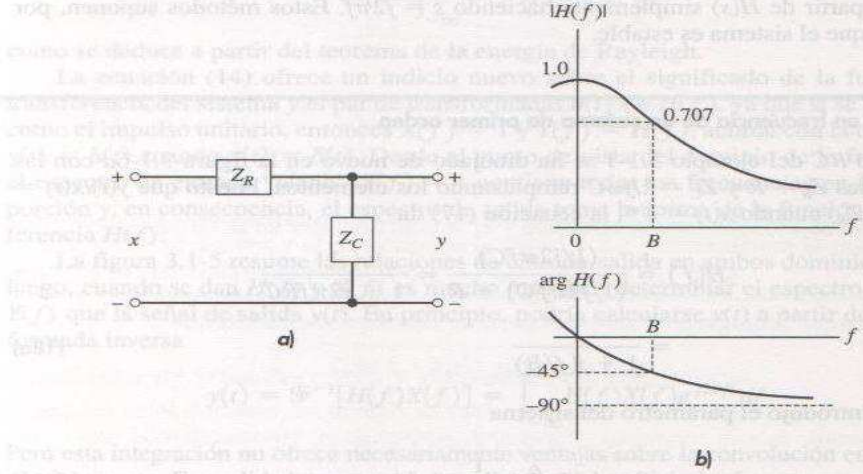


Figura 3.1-6 Filtro RC de pasabajas. *a*) Circuito; *b*) función de transferencia.

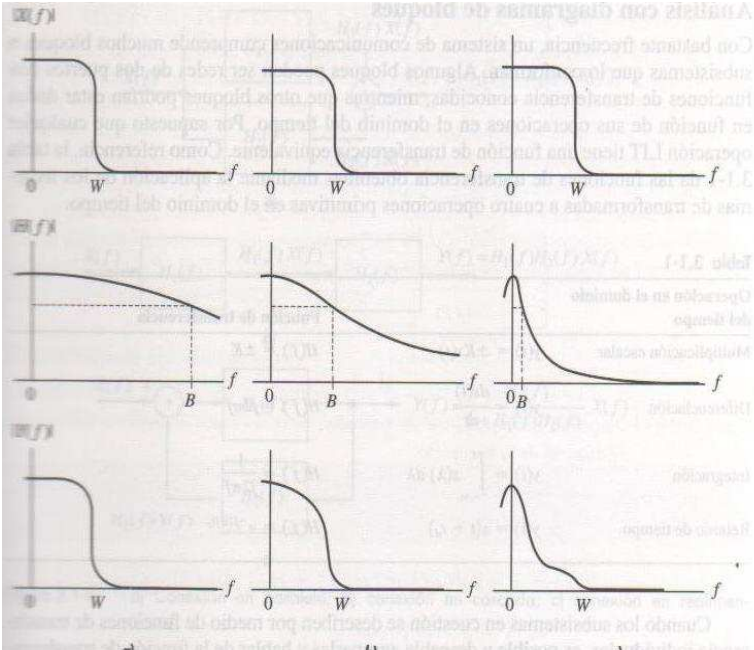


Figura 3.1-7 Análisis en el dominio de la frecuencia de un filtro pasabajas de primer orden. a) $B \gg W$; b) $B \approx W$; c) $B \ll W$.

3. Si $W \gg B$, como se muestra en la figura 3.1-7*c*, el espectro de la entrada tiene un valor casi constante $X(0)$ para $|f| < B$ tal que $Y(f) \approx X(0)H(f)$. Así que $y(t) \approx X(0)h(t)$, y la señal de salida se parece ahora a la *respuesta al impulso* del filtro. En estas condiciones, es posible modelar razonablemente la señal de entrada como un impulso.

El análisis previo en el dominio del tiempo con un pulso de entrada rectangular confirma estas conclusiones ya que el ancho espectral nominal del pulso es $W = 1/\tau$. El caso $W \ll B$ corresponde entonces a $1/\tau \ll 1/2\pi RC$ o $\tau/RC \gg 1$ y en la figura 3.1-4*a* se ve que $y(t) \approx x(t)$. Inversamente, $W \gg B$ corresponde a $\tau/RC \ll 1$ como en la figura 3.1-4*c* donde $y(t)$ se parece más a $h(t)$.

EJERCICIO 3.1-2

Determínese $H(f)$ cuando $Z_L = j\omega L$ remplaza a Z_C en la figura 3.1-6*a*. Exprésese su resultado en función del parámetro del sistema $f_\ell = R/2\pi L$, y justifíquese el nombre de "filtro pasaaltas" dibujando $|H(f)|$ *versus* f.

Análisis con diagramas de bloques

Con bastante frecuencia, un sistema de comunicaciones comprende muchos bloques o subsistemas que lo conforman. Algunos bloques pueden ser redes de dos puertos con funciones de transferencia conocidas, mientras que otros bloques podrían estar dados en función de sus operaciones en el dominio del tiempo. Por supuesto que cualquier operación LIT tiene una función de transferencia equivalente. Como referencia, la tabla 3.1-1 da las funciones de transferencia obtenidas mediante la aplicación de los teoremas de transformadas a cuatro operaciones primitivas en el dominio del tiempo.

Tabla 3.1-1

Operación en el dominio del tiempo		Función de transferencia
Multiplicación escalar	$y(t) = \pm Kx(t)$	$H(f) = \pm K$
Diferenciación	$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$	$H(f) = j2\pi f$
Integración	$y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$	$H(f) = \dfrac{1}{j2\pi f}$
Retardo de tiempo	$y(t) = x(t - t_d)$	$H(f) = e^{-j2\pi f t_d}$

Cuando los subsistemas en cuestión se describen por medio de funciones de transferencia individuales, es posible y deseable agruparlas y hablar de la función de transferencia total del sistema. Las relaciones correspondientes se dan más adelante para dos bloques conectados en paralelo, en cascada y con realimentación. Se pueden analizar configuraciones más complicadas mediante aplicaciones sucesivas de estas reglas básicas. Sin embargo, se debe hacer una consideración esencial: que cualesquiera efectos de interacción o de *carga* deben ser tomados en cuenta por las funciones de transferencia individuales de manera que representen la respuesta real de los subsistemas en el contexto del sistema completo. (Podría usarse un seguidor de voltaje op-amp para proporcionar aislamiento entre bloques y prevenir el efecto de carga.)

En la figura 3.1-8*a* se muestra el diagrama de dos bloques en **paralelo**: ambas unidades tienen la misma entrada y sus salidas se suman para proporcionar la salida del sistema. De la superposición se deduce que $Y(f) = [H_1(f) + H_2(f)]X(f)$ tal que la función de transferencia total es

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f) \qquad \text{Conexión en paralelo} \qquad \textbf{[19a]}$$

En la conexión en **cascada**, figura 3.1-8*b*, la salida de la primera unidad es la entrada de la segunda, así que $Y(f) = H_2(f)[H_1(f)X(f)]$ y

$$H(f) = H_1(f)H_2(f) \qquad \text{Conexión en cascada} \qquad \textbf{[19b]}$$

La conexión **realimentada**, figura 3.1-8*c*, difiere de las otras dos en que la salida es devuelta a través de $H_2(f)$ y se le resta a la entrada. Por ello,

$$Y(f) = H_1(f)[X(f) - H_2(f)Y(f)]$$

y reagrupando da $Y(f) = \{H_1(f)/[1 + H_1(f)H_2(f)]\}X(f)$, de modo que

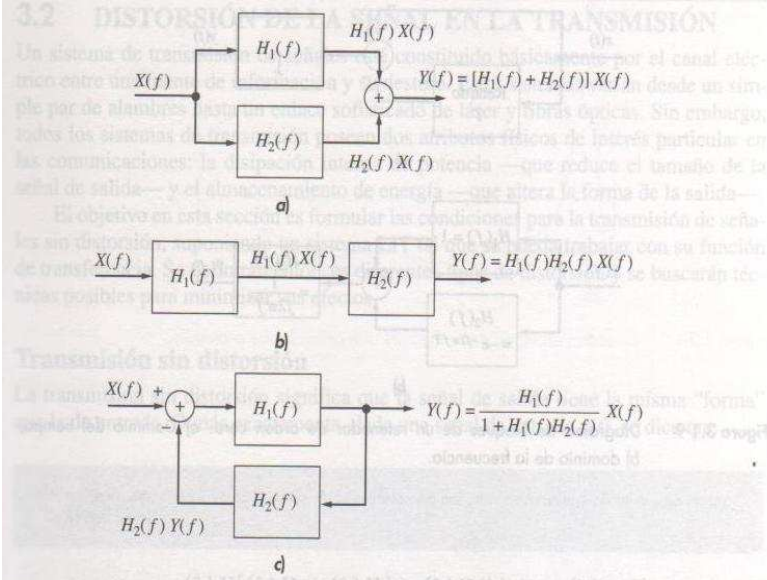


Figura 3.1-8 *a)* Conexión en paralelo; *b)* conexión en cascada; *c)* conexión en realimentación.

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)} \qquad \text{Conexión realimentada} \qquad [19c]$$

Este caso se debería llamar más apropiadamente conexión de realimentación *negativa* para distinguirlo de la realimentación positiva, donde la señal devuelta se suma a la entrada en vez de restarla.

Retenedor de orden cero **EJEMPLO 3.1-3**

El sistema retenedor de orden cero de la figura 3.1-9*a* tiene varias aplicaciones en las comunicaciones eléctricas. Aquí se tomará como ejercicio ilustrativo de las relaciones en paralelo y en cascada. Empero, primero se necesitan las funciones de transferencia individuales, las cuales se determinan de la forma siguiente: la rama superior de la sección en paralelo es una trayectoria directa, así que, trivialmente, $H_1(f) = 1$; la rama inferior produce un retardo de tiempo simple de T segundos seguido por una inversión de signo, y agrupándolas da $H_2(f) = -e^{-j2\pi fT}$; el integrador en el bloque final tiene $H_3(f) = 1/j2\pi f$. La figura 3.1-9*b* es el diagrama de bloques equivalente en términos de estas funciones de transferencias.

Habiendo llegado hasta aquí, el resto del trabajo es fácil. Se combinan las ramas en paralelo $H_{12}(f) = H_1(f) + H_2(f)$ y se usa la regla de la cascada para obtener

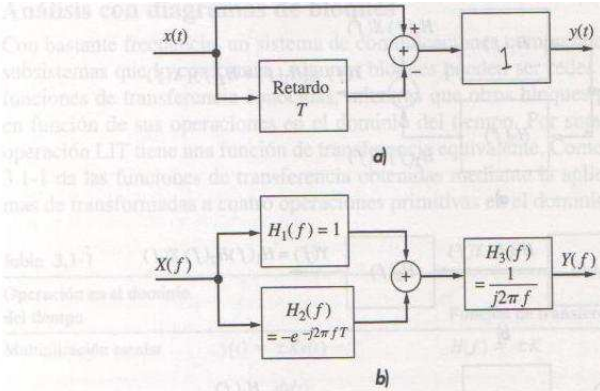


Figura 3.1-9 Diagrama de bloques de un retenedor de orden cero. *a)* Dominio del tiempo; *b)* dominio de la frecuencia.

$$H(f) = H_{12}(f)H_3(f) = [H_1(f) + H_2(f)]H_3(f)$$
$$= [1 - e^{-j2\pi fT}]\frac{1}{j2\pi f}$$
$$= \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} e^{-j\pi fT} = \frac{\text{sen } \pi fT}{\pi f} e^{-j\pi fT}$$
$$= T \text{ sinc } fT e^{-j\pi fT}$$

Aquí se tiene el resultado poco usual en el que la razón de amplitud de este sistema es una *¡función sinc* en frecuencia!

Para confirmar este resultado por una vía diferente, se calcula la respuesta al impulso $h(t)$ utilizando la definición de que $y(t) = h(t)$ cuando $x(t) = \delta(t)$. Un análisis más cuidadoso de la figura 3.1-9*a* muestra que la entrada al integrador es entonces $x(t) - x(t - T) = \delta(t) - \delta(t - T)$, tal que

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} [\delta(\lambda) - \delta(\lambda - T)]\, d\lambda = u(t) - u(t - T)$$

la cual representa un pulso rectangular que comienza en $t = 0$. Escribiendo de nuevo la respuesta al impulso como $h(t) = \Pi[(t - T/2)/T]$ ayuda a verificar la relación de transformación $h(t) \leftrightarrow H(f)$.

EJERCICIO 3.1-3 Sea $x(t) = A\Pi(t/\tau)$ aplicado al retenedor de orden cero. Use el análisis en el dominio de la frecuencia para determinar $y(t)$ cuando $\tau \ll T$, $\tau = T$ y $\tau \gg T$.

3.2 DISTORSIÓN DE LA SEÑAL EN LA TRANSMISIÓN

Un sistema de transmisión de señales está constituido básicamente por el canal eléctrico entre una fuente de información y su destino. Estos sistemas varían desde un simple par de alambres hasta un enlace sofisticado de láser y fibras ópticas. Sin embargo, todos los sistemas de transmisión poseen dos atributos físicos de interés particular en las comunicaciones: la disipación interna de potencia —que reduce el tamaño de la señal de salida— y el almacenamiento de energía —que altera la forma de la salida—.

El objetivo en esta sección es formular las condiciones para la transmisión de señales sin distorsión, suponiendo un sistema LIT tal que se pueda trabajar con su función de transferencia. Se definirán entonces diferentes tipos de distorsión y se buscarán técnicas posibles para minimizar sus efectos.

Transmisión sin distorsión

La transmisión sin distorsión significa que la señal de salida tiene la misma "forma" que la de entrada. O más exactamente, dada una señal de entrada $x(t)$, se dice que

> La salida no está distorsionada si difiere de la entrada sólo por una constante multiplicativa y un retraso de tiempo finito.

Analíticamente, se tiene transmisión sin distorsión si

$$y(t) = Kx(t - t_d) \qquad [1]$$

donde K y t_d son constantes.

Las propiedades de un sistema sin distorsión se determinan fácilmente examinando el espectro de salida

$$Y(f) = \mathcal{F}[y(t)] = Ke^{-j\omega t_d}X(f)$$

Ahora bien, por definición de la función de transferencia, $Y(f) = H(f)X(f)$, de modo que

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d} \qquad [2a]$$

Parafraseando la ecuación (2a), un sistema que produce transmisión sin distorsión debe tener una *respuesta de amplitud constante* y un *desplazamiento de fase lineal* negativo, esto es,

$$|H(f)| = |K| \qquad \arg H(f) = -2\pi t_d f \pm m180° \qquad [2b]$$

Obsérvese que $H(f)$ debe pasar por el origen o intersecar en un múltiplo entero de $\pm 180°$. Se ha añadido el término $\pm m180°$ a la fase para explicar el caso en que K sea positiva o negativa. En el caso de un retraso de tiempo igual a cero, la fase es constante en 0 o en $\pm 180°$.

Se debe mencionar en seguida una condición importante y bastante obvia de la ecuación (2). Las condiciones sobre $H(f)$ se requieren sólo en aquellas frecuencias donde la señal de entrada tiene un contenido espectral significativo. Para subrayar este punto, la figura 3.2-1 muestra la densidad espectral de energía de una señal de voz promedio obtenida en mediciones de laboratorio. Puesto que la densidad espectral es bastante pequeña para $f < 200$ Hz y $f > 3\,200$ Hz, se concluye que un sistema que satis-

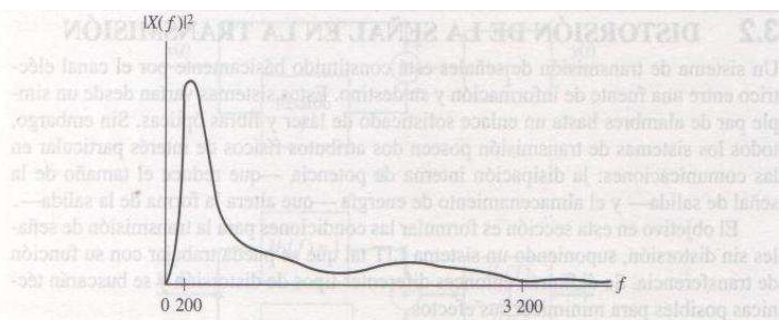


Figura 3.2-1 Densidad espectral de energía de una señal de voz promedio.

face la ecuación (2) en la banda $200 \leq |f| \leq 3\,200$ Hz tendría una transmisión de voz casi libre de distorsión. De manera semejante, como el oído humano sólo procesa sonidos entre aproximadamente 20 Hz y 20 000 Hz, es suficiente con un sistema de audio que esté libre de distorsión en este rango.

Sin embargo, en la práctica, las estrictas demandas de la transmisión sin distorsión sólo se satisfacen aproximadamente, así que los sistemas de transmisión siempre producen alguna cantidad de distorsión de la señal. Con el propósito de estudiar los efectos de la distorsión sobre diferentes señales, se definirán los tres principales tipos de distorsión:

1. *Distorsión de amplitud,* que ocurre cuando
$$|H(f)| \neq |K|$$
2. *Distorsión de retardo,* que ocurre cuando
$$\arg H(f) \neq -2\pi t_d f \pm m180°$$
3. *Distorsión no lineal,* que ocurre cuando el sistema incluye elementos no lineales.

Los primeros dos tipos se agrupan bajo la designación general de distorsión *lineal* y se describen en términos de la función de transferencia de un sistema lineal. Para el tercer tipo, la no linealidad excluye la existencia de una función de transferencia.

EJEMPLO 3.2-1 Supóngase que un sistema de transmisión tiene la respuesta en frecuencia mostrada en la figura 3.2-2. Este sistema satisface la ecuación (2) para $20 \leq |f| \leq 30$ kHz. Para los otros valores de f, hay distorsión de amplitud para $|f| < 20$ kHz y $|f| > 50$ kHz, y distorsión de retardo para $|f| > 30$ kHz.

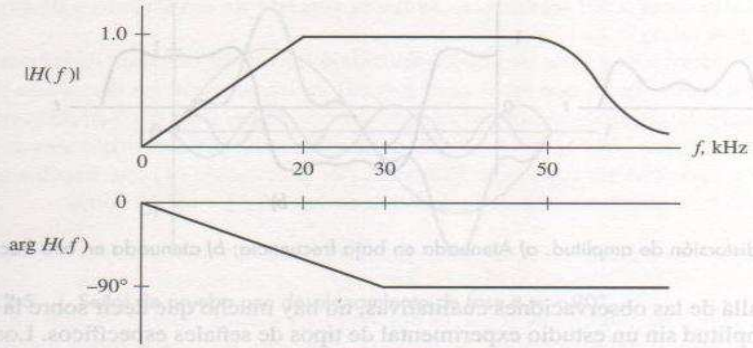


Figura 3.2-2

Distorsión lineal

La distorsión lineal incluye cualquier distorsión de amplitud o de retardo asociada con un sistema de transmisión lineal. La distorsión de amplitud se describe fácilmente en el dominio de la frecuencia, lo que significa simplemente que las componentes de frecuencia en la salida no están en la proporción correcta. Dado que esto se origina cuando $|H(f)|$ no es constante con la frecuencia, la distorsión de amplitud se denomina en ocasiones **distorsión en frecuencia**.

Las formas más comunes de distorsión de amplitud son el exceso de atenuación o realce de frecuencias extremadamente altas o bajas en el espectro de la señal. Menos común, pero igualmente problemática, es la respuesta desproporcionada en una banda de frecuencias dentro del espectro. Mientras que la descripción en el dominio de la frecuencia es fácil, los efectos en el dominio del tiempo son mucho menos obvios, excepto para señales muy sencillas. Como ilustración, una señal de prueba sencilla y adecuada es $x(t) = \cos \omega_0 t - 1/3 \cos 3\omega_0 t + 1/5 \cos 5\omega_0 t$, que es una aproximación burda de una onda cuadrada y se dibuja en la figura 3.2-3. Si la componente de baja frecuencia o la de alta frecuencia es atenuada a la mitad, las salidas resultantes son como se muestran en la figura 3.2-4. Como era de esperarse, la pérdida del término de baja frecuencia reduce la "agudeza" de la forma de onda.

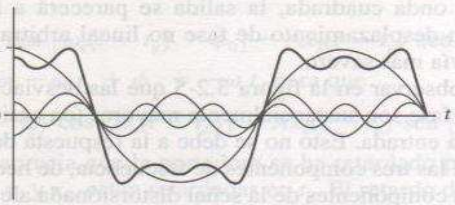


Figura 3.2-3 Señal de prueba $x(t) = \cos \omega_0 t - 1/3 \cos 3\omega_0 t + 1/5 \cos 5\omega_0 t$.

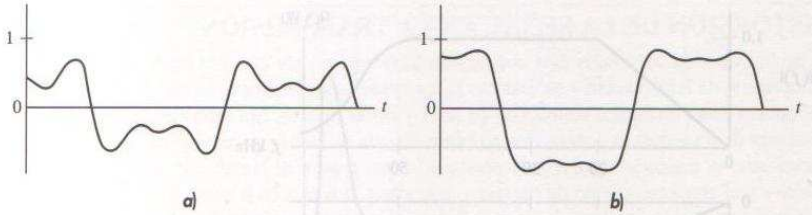


Figura 3.2-4 Señal de prueba con distorsión de amplitud. *a)* Atenuada en baja frecuencia; *b)* atenuada en alta frecuencia.

Más allá de las observaciones cualitativas, no hay mucho que decir sobre la distorsión de amplitud sin un estudio experimental de tipos de señales específicos. Los resultados de esos estudios se expresan usualmente en términos de la respuesta en frecuencia "plana" requerida; entendiendo por esto la banda de frecuencias en la cual $|H(f)|$ debe ser constante dentro de cierta tolerancia, de forma tal que la distorsión de amplitud sea suficientemente pequeña.

Ahora la atención se dirige al desplazamiento de fase y al retraso de tiempo. Si el desplazamiento de fase no es lineal, las diversas componentes de frecuencia sufren distintas cantidades de retraso de tiempo y la distorsión resultante se denomina **distorsión de fase** o **de retardo**. Para un desplazamiento arbitrario de la fase, el retardo de tiempo es una función de la frecuencia y se determina escribiendo $H(f) = -2\pi f t_d(f)$ con todos los ángulos expresados en *radianes*. Por tanto,

$$t_d(f) = -\frac{\arg H(f)}{2\pi f} \qquad [3]$$

que es independiente de la frecuencia solamente si $H(f)$ es lineal con la frecuencia.

Un aspecto común que suscita confusión es el **retardo de tiempo constante** en relación con el **desplazamiento de fase constante**. El primero es deseable y se requiere para una transmisión sin distorsión. El segundo, en general, produce distorsión. Suponga que un sistema tiene el desplazamiento de fase constante θ diferente de 0° o $\pm m180°$. Entonces, cada componente de frecuencia de la señal estará retardado por $\theta/2\pi$ *ciclos* de su propia frecuencia; éste es el significado del desplazamiento de fase constante. Pero los retardos de tiempo serán diversos, las componentes de frecuencia se mezclarán en el tiempo y el resultado será una distorsión.

La situación en la que el desplazamiento de fase constante produzca distorsión se ilustra en forma sencilla regresando a la señal de prueba de la figura 3.2-3 y desplazando cada componente por un cuarto de ciclo, $\theta = -90°$. Mientras que la entrada era aproximadamente una onda cuadrada, la salida se parecerá a la onda triangular en la figura 3.2-5. Con un desplazamiento de fase no lineal arbitrario, el deterioro de la forma de onda es todavía más severo.

También se debe observar en la figura 3.2-5 que las desviaciones *pico* de la señal con desplazamiento de fase son sustancialmente mayores (en casi 50%) que aquellas de la señal de prueba de la entrada. Esto no se debe a la respuesta de amplitud, ya que las amplitudes de salida de las tres componentes de frecuencia, de hecho, no han cambiado; más bien, es porque las componentes de la señal distorsionada alcanzarán valores máximos o mínimos al mismo tiempo, lo cual no es válido para la entrada. Por el contrario, si se hubiera comenzado con la figura 3.2-5 como la señal de prueba, un desplazamiento

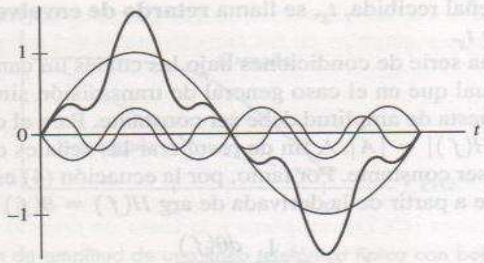


Figura 3.2-5 Señal de prueba con desplazamiento de fase $\theta = -90°$.

constante de fase de $+90°$ produciría la figura 3.2-3 como la forma de onda de salida. Por eso se ve que la *distorsión de retardo por sí sola* da como resultado un aumento o una disminución de los valores pico y también otras alteraciones de la forma de la onda.

Evidentemente, la distorsión de retardo es crítica en la transmisión de pulsos y se ha trabajado mucho en compensar el retardo de transmisión para sistemas de datos digitales y similares. Por otro lado, curiosamente el oído humano es insensible a la distorsión de retardo; las formas de ondas de las figuras 3.2-3 y 3.2-5 sonarían casi igual al pasarlas por una bocina. Por ello, la distorsión de retardo rara vez es preocupante en la transmisión de voz y música.

Conviene revisar un poco más el impacto del retardo de fase sobre una señal modulada. La función de transferencia de un canal arbitrario se expresa como

$$H(f) = Ae^{j(-2\pi f t_s + \phi_0)} = (Ae^{j\phi_0})e^{-j2\pi f t_s} \quad [4]$$

donde $H(f) = -2\pi f t_g + \phi_0$ conduce a $t_d(f) = t_g - \phi_0/2\pi f$ por la ecuación (3). Si la entrada a este canal pasabanda es

$$x(t) = x_1(t)\cos\omega_c t - x_2(t)\,\text{sen}\,\omega_c t \quad [5]$$

entonces, por la propiedad de retardo de tiempo de las transformadas de Fourier, la salida será retardada por t_g. Como $e^{j\phi_0}$ se incorpora en los términos seno y coseno, la salida del canal es

$$y(t) = Ax_1(t - t_g)\cos[\omega_c(t - t_g) + \phi_0] - Ax_2(t - t_g)\,\text{sen}\,[\omega_c(t - t_g) + \phi_0]$$

Se observa que $H(f_c) = -\omega_c t_g + \phi_0 = -\omega_c t_d$ para que

$$y(t) = Ax_1(t - t_g)\cos[\omega_c(t - t_d)] - Ax_2(t - t_g)\,\text{sen}\,[\omega_c(t - t_d)] \quad [6]$$

De la ecuación (6) se aprecia que la portadora se ha retardado por t_d y las señales que modulan la portadora, x_1 y x_2, están retardadas en t_g. El retardo de tiempo t_d correspondiente al desplazamiento de fase se llama **retardo de fase** del canal. Dicho retardo se conoce también como retardo de **portadora**. El retardo entre la envolvente de la señal

de entrada y el de la señal recibida, t_g, se llama **retardo de envolvente** o **de grupo** del canal. En general, $t_d \neq t_g$.

Esto conduce a una serie de condiciones bajo las cuales un canal lineal pasabanda no tiene distorsión. Igual que en el caso general de transmisión sin distorsión descrito anteriormente, la respuesta de amplitud debe ser constante. Para el canal de la ecuación (4) esto implica que $|H(f)| = |A|$. A fin de recuperar las señales originales x_1 y x_2, el retardo de grupo debe ser constante. Por tanto, por la ecuación (4) esto implica que t_g se determina directamente a partir de la derivada de arg $H(f) = \theta(f)$ como

$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(f)}{df} \quad [7]$$

Obsérvese que esta condición sobre el arg $H(f)$ es menos restrictiva que en el caso general presentado anteriormente. Si $\phi_0 = 0$, entonces las condiciones generales de transmisión sin distorsión se cumplen y $t_d = t_g$.

EJERCICIO 3.2-1 Usar la ecuación (3) para graficar $t_d(f)$ a partir del arg $H(f)$ en la figura 3.2-2.

Compensación

Teóricamente, la distorsión lineal —de amplitud y de retardo— se puede subsanar mediante el uso de redes de *compensación*. La figura 3.2-6 muestra un compensador ("equalizer") $H_{eq}(f)$ en cascada con un canal de transmisión distorsionador $H_C(f)$. Puesto que la función de transferencia total es $H(f) = H_C(f)H_{eq}(f)$, la salida final no estará distorsionada si $H_C(f)H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega t_d}$, donde K y t_d son constantes más o menos arbitrarias. Por tanto, se requiere que

$$H_{eq}(f) = \frac{Ke^{-j\omega t_d}}{H_C(f)} \quad [8]$$

siempre que $X(f) \neq 0$.

Raro es el caso en que un compensador se diseña para satisfacer exactamente la ecuación (8), razón por la cual se dice que la compensación es una corrección *teórica*. Pero a menudo son posibles excelentes aproximaciones de forma que la distorsión lineal se reduzca a niveles tolerables. Quizá la técnica de compensación más antigua incluya el uso de *bobinas de carga* en líneas telefónicas de cables trenzados. Estas bobinas son inductores colocados en derivación a través de la línea a cada kilómetro aproximadamente, dando la razón de amplitud mejorada típica que se ilustra en la figura 3.2-7. Se han diseñado otros elementos de circuitos para tareas de compensación específicas.

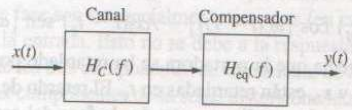


Figura 3.2-6 Canal con compensador de la distorsión lineal.

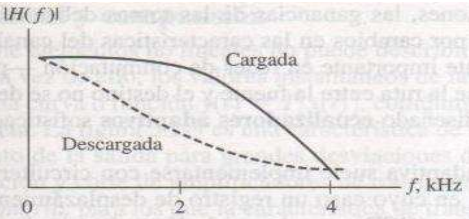


Figura 3.2-7 Razón de amplitud de una línea telefónica típica con bobinas de carga y sin ellas para compensación.

Recientemente, el **compensador de líneas de retardo grabadas** o **filtro transversal** ha surgido como un dispositivo conveniente y flexible. Para ilustrar el principio, la figura 3.2-8 muestra una línea de retardo con retardo de tiempo total igual a 2Δ y con terminales en cada extremo y en el centro. Las salidas en las terminales pasan a través de ganancias ajustables, c_{-1}, c_0 y c_1, y se suman para formar la salida final. Entonces,

$$y(t) = c_{-1}x(t) + c_0\,x(t-\Delta) + c_1x(t-2\Delta) \qquad [9a]$$

y

$$\begin{aligned} H_{eq}(f) &= c_{-1} + c_0\,e^{-j\omega\Delta} + c_1e^{-j\omega 2\Delta} \\ &= (c_{-1}e^{+j\omega\Delta} + c_0 + c_1e^{-j\omega\Delta})e^{-j\omega\Delta} \end{aligned} \qquad [9b]$$

Generalizando la ecuación (9*b*) al caso de una línea de retardo $2M\Delta$ con $2M + 1$ derivaciones, se obtiene

$$H_{eq}(f) = \left(\sum_{m=-M}^{M} c_m e^{-j\omega m\Delta}\right)e^{-j\omega M\Delta} \qquad [10]$$

que tiene la forma de una *serie exponencial de Fourier* con periodicidad en frecuencia igual a $1/\Delta$. Por tanto, dada la $H_C(f)$ de un canal que debe compensarse en la banda $|f| < W$, el lado derecho de la ecuación (8) se aproxima por medio de una serie de Fourier con periodicidad en frecuencia igual a $1/\Delta \geq W$ (lo que determina a Δ), estimando el número de términos significativos (lo cual está determinado por M) y ajustando las ganancias de las tomas a los coeficientes de la serie.

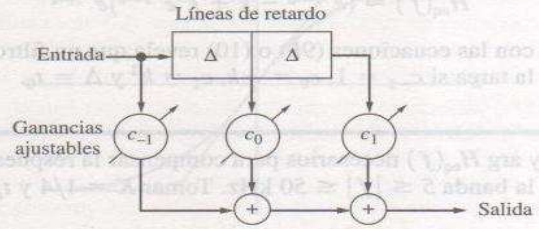


Figura 3.2-8 Filtro transversal con tres terminales.

En muchas aplicaciones, las ganancias de las tomas deben reajustarse de vez en cuando para compensar por cambios en las características del canal. La compensación ajustable es especialmente importante en redes de conmutación —por ejemplo, un sistema telefónico—, ya que la ruta entre la fuente y el destino no se determina con antelación. Por tanto, se han diseñado **ecualizadores adaptivos** sofisticados provistos de un reajuste automático.

La compensación adaptiva suele implementarse con circuitería digital y control con microprocesadores, en cuyo caso un registro de desplazamiento o un dispositivo de acoplamiento por carga (CCD) remplaza a la línea de retardo. Para ecualizadores fijos (no ajustables), el filtro transversal se fabrica en un circuito integrado usando un dispositivo de onda acústica superficial (SAW).

EJEMPLO 3.2-2 **Distorsión de multitrayectorias**

Algunas veces los sistemas de radio sufren de una distorsión de multitrayectorias producida por dos (o más) trayectorias de propagación entre el transmisor y el receptor. Las reflexiones debidas a impedancias no ajustadas en un sistema de cable producen el mismo efecto. Como ejemplo sencillo, suponga que la salida del canal es

$$y(t) = K_1\,x(t-t_1) + K_2\,x(t-t_2)$$

en la que el segundo término corresponde a un eco del primero si $t_2 > t_1$. Entonces

$$\begin{aligned} H_C(f) &= K_1e^{-j\omega t_1} + K_2e^{-j\omega t_2} \\ &= K_1e^{-j\omega t_1}(1 + ke^{-j\omega t_0}) \end{aligned} \qquad [11]$$

donde $k = K_2/K_1$ and $t_0 = t_2 - t_1$.

Si se toma $K = K_1$ y $t_d = t_1$ en la ecuación (8), la característica requerida del compensador es

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{1 + ke^{-j\omega t_0}} = 1 - ke^{-j\omega t_0} + k^2e^{-j2\omega t_0} + \cdots$$

Aquí se usó la expansión binomial porque, en este caso, conduce a la forma de la ecuación (10) sin los cálculos de la serie de Fourier. Suponiendo un eco pequeño, tal que $k^2 \ll 1$, se desprecian los términos de las potencias más altas y se reescribe $H_{eq}(f)$ como

$$H_{eq}(f) \approx (e^{+j\omega t_0} - k + k^2e^{-j\omega t_0})e^{-j\omega t_0}$$

Comparando ésta con las ecuaciones (9*b*) o (10) revela que un filtro transversal de tres derivaciones hará la tarea si $c_{-1} = 1$, $c_0 = -k$, $c_1 = k^2$ y $\Delta = t_0$.

EJERCICIO 3.2-2 Dibujar $|H_{eq}(f)|$ y arg $H_{eq}(f)$ necesarios para compensar la respuesta en frecuencia de la figura 3.2-2 en la banda $5 \leq |f| \leq 50$ kHz. Tomar $K = 1/4$ y $t_d = 1/120$ ms en la ecuación (8).

Distorsión no lineal y compansión

Un sistema que tiene elementos no lineales no puede describirse mediante una función de transferencia. En vez de ello, los valores instantáneos de la entrada y la salida están relacionados por una curva o función $y(t) = T[x(t)]$, comúnmente llamada **característica de transferencia**. La figura 3.2-9 es una característica de transferencia representativa; el aplanamiento de la salida para grandes desviaciones de la entrada es el efecto conocido de saturación y corte de amplificadores de transistores. Sólo se considerarán dispositivos *sin memoria,* para los que la característica de transferencia es una descripción completa.

En condiciones de entrada de pequeña señal, es posible linealizar por tramos la característica de transferencia, como lo muestran las líneas más finas en la figura. El enfoque más general es una aproximación polinomial a la curva, de la forma

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_3 x^3(t) + \cdots \qquad [12a]$$

y las potencias mayores de $x(t)$ en esta ecuación dan lugar a la distorsión no lineal.

Aunque no se tiene una función de transferencia, es posible determinar el espectro de la salida, por lo menos de manera formal, transformando la ecuación (12a). Específicamente, empleando el teorema de la convolución,

$$Y(f) = a_1 X(f) + a_2 X * X(f) + a_3 X * X * X(f) + \cdots \qquad [12b]$$

Ahora bien, si $x(t)$ está limitada en banda a W, la salida de una red lineal no contendrá frecuencias más allá de $|f| < W$. Pero en el caso no lineal, se observa que la salida incluye a $X * X(f)$, que está limitada en banda a $2W$, $X * X * X(f)$, que está limitada en banda a $3W$, etc. Por tanto, las no linealidades han creado componentes de frecuencia en la salida que no estaban en la entrada. Además, puesto que $X * X(f)$ pueden contener componentes para $|f| < W$, esta parte del espectro se traslapa con el espectro de $X(f)$. Usando técnicas de filtrado, las componentes añadidas para $|f| > W$ pueden eliminarse, pero no hay una forma conveniente de eliminar las componentes añadidas para $|f| < W$. De hecho, éstas constituyen la distorsión no lineal.

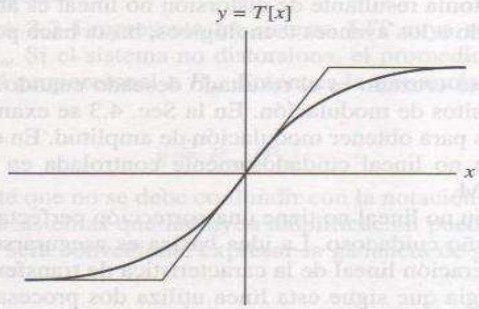


Figura 3.2-9 Característica de transferencia de un dispositivo no lineal.

Se obtiene una medida cuantitativa de la distorsión no lineal tomando una simple onda coseno, $x(t) = \cos \omega_0 t$, como la entrada. Insertándola en la ecuación (12a) y expandiendo da

$$y(t) = \left(\frac{a_2}{2} + \frac{3a_4}{8} + \cdots\right) + \left(a_1 + \frac{3a_3}{4} + \cdots\right) \cos \omega_0 t + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{4} + \cdots\right) \cos 2\omega_0 t + \cdots$$

Por consiguiente, la distorsión no lineal aparece como **armónicas** de la onda de entrada. La cantidad de distorsión de la segunda armónica es la relación entre la amplitud de este término y la fundamental, o en porcentaje:

$$\text{Distorsión de la segunda armónica} = \left|\frac{a_2/2 + a_4/4 + \cdots}{a_1 + 3a_3/4 + \cdots}\right| \times 100\%$$

Las armónicas de orden mayor se tratan de igual manera. Sin embargo, su efecto es normalmente bastante menor y muchas se eliminan por completo mediante filtrado.

Si la entrada es una suma de dos ondas cosenos, digamos $\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$, la salida incluirá todas las armónicas de f_1 y f_2, más los términos de los productos cruzados $f_2 - f_1, f_2 + f_1, f_2 - 2f_1$, etc. Estas frecuencias de sumas y diferencias se designan como **distorsión de intermodulación**. Generalizando el efecto de la intermodulación, si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, entonces $y(t)$ contiene el **producto cruzado** $x_1(t)x_2(t)$ (y productos de orden mayor que se ignoran aquí). En el dominio de la frecuencia, $x_1(t)x_2(t)$ se convierte en $X_1 * X_2(f)$; y aunque $X_1(f)$ y $X_2(f)$ puedan estar separadas en frecuencia, $X_1 * X_2(f)$ puede traslaparse con ellas, produciendo una forma de **diafonía**. Este aspecto de la distorsión no lineal es preocupante en los sistemas de transmisión telefónica. Por otra parte, el término del producto cruzado es el resultado deseado cuando se usan dispositivos no lineales para propósitos de modulación.

Es importante señalar la diferencia entre diafonía y otros tipos de interferencia. La diafonía ocurre cuando una señal traspasa la banda de frecuencias de otra señal debido a distorsión no lineal en el canal. La captación de una conversación en un teléfono inalámbrico se debe a que el espectro de frecuencias asignado a esos dispositivos está demasiado congestionado para acomodar a todos los usuarios en frecuencias portadoras separadas. Por tanto, puede ocurrir que se "compartan" las frecuencias de vez en cuando. Aunque la diafonía resultante de distorsión no lineal es ahora rara en la transmisión telefónica debido a los avances tecnológicos, hasta hace poco fue un problema importante.

El término producto cruzado es el resultado deseado cuando se usan dispositivos no lineales para propósitos de modulación. En la Sec. 4.3 se examinará cómo se usan dispositivos no lineales para obtener modulación de amplitud. En el capítulo 5 aparece de nuevo la distorsión no lineal cuidadosamente controlada en la modulación y la detección de señales FM.

Si bien la distorsión no lineal no tiene una corrección perfecta, es factible minimizarla mediante un diseño cuidadoso. La idea básica es asegurarse de que la señal no exceda la banda de operación lineal de la característica de transferencia del canal. Irónicamente, una estrategia que sigue esta línea utiliza dos procesadores de señales no lineales: un *compresor* en la entrada y un *expansor* en la salida, como se muestra en la figura 3.2-10.

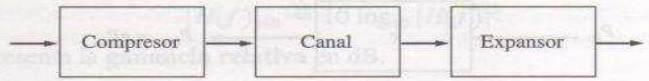


Figura 3.2-10 Sistema de compansión.

Un compresor tiene mayor amplificación en los niveles bajos de la señal que en los niveles altos, algo semejante a la figura 3.2-9, y por ello comprime la banda de la señal de entrada. Si la señal comprimida cae dentro de la banda lineal del canal, la señal en la salida del canal es proporcional a $T_{comp}[x(t)]$, la cual está distorsionada por el compresor pero no por el canal. Idealmente, entonces, el expansor tiene una característica que se complementa con la del compresor para que la salida expandida sea proporcional a $T_{exp}\{T_{comp}[x(t)]\} = x(t)$, como se desea.

El uso conjunto de la compresión y la expansión se denomina **compansión** y es de gran importancia en los sistemas telefónicos. Además de reducir la distorsión no lineal, la compansión tiende a compensar las diferencias en los niveles de las señales entre personas que hablan muy alto o muy bajo. En efecto, lo último es la ventaja clave de la compansión en relación con la técnica más sencilla de atenuar linealmente la señal en la entrada (para mantenerla en la banda lineal del canal) y amplificarla linealmente en la salida.

3.3 PÉRDIDAS DE TRANSMISIÓN Y DECIBELES

Además de cualquier distorsión de la señal, un sistema de transmisión también reduce el nivel de potencia o la "intensidad" de la señal. Esta reducción de la intensidad de la señal se expresa en términos de la pérdida de potencia en la transmisión. Aunque la pérdida de transmisión se compensa con la amplificación de potencia, el ruido eléctrico omnipresente puede impedir la recuperación exitosa de la señal cuando la pérdida de transmisión es grande.

Esta sección describe la pérdida de transmisión encontrada en los sistemas de comunicación por cable y radio. Conviene comenzar con un breve repaso del concepto más conocido de ganancia de potencia e introducir los decibeles como una medida útil de las relaciones de potencia usadas por los ingenieros de comunicaciones.

Ganancia de potencia

Suponga que la figura 3.3-1 representa un sistema LIT cuya señal de entrada tiene potencia promedio P_{in}. Si el sistema no distorsiona, el promedio de la potencia de la señal en la salida será proporcional a P_{in}. Entonces la **ganancia de potencia** del sistema es

$$g \triangleq P_{out}/P_{in} \qquad [1]$$

un parámetro constante que no se debe confundir con la notación $g(t)$usada para la respuesta al escalón. Los sistemas que incluyen amplificación pueden tener valores muy grandes de g, así que será conveniente expresar la ganancia de potencia en **decibeles** (dB) definidos como

$$g_{dB} \triangleq 10 \log_{10} g \qquad [2]$$

Figura 3.3-1 Sistema LIT con ganancia de potencia g.

La "B" en dB es en honor de Alexander Graham Bell, quien fue el primero en usar las unidades de medida de potencias logarítmicas.

Puesto que el decibel es una unidad logarítmica, convierte potencias de 10 a productos de 10. Por ejemplo, $g = 10^m$ se convierte en $g_{dB} = m \times 10$ dB. Por supuesto, la ganancia de potencia es siempre positiva, pero sí ocurren valores negativos en dB cuando $g \leq 1.0 = 10^0$ y por ende $g_{dB} \leq 0$ dB. Observe cuidadosamente que 0 dB corresponde a una ganancia *unitaria* ($g = 1$). Dado un valor en dB, el valor de la relación es

$$g = 10^{(g_{dB}/10)} \qquad [3]$$

obtenida por inversión de la ecuación (2).

En tanto que los decibeles siempre representan *relaciones de potencia*, la potencia de la señal misma puede expresarse en dB si se divide P entre un watt o un miliwatt, en la forma siguiente:

$$P_{dBW} = 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ W}} \qquad P_{dBm} = 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ mW}} \qquad [4]$$

Escribiendo de nuevo la ecuación (1) como $(P_{out}/1 \text{ mW}) = g(P_{in}/1 \text{ mW})$ y tomando el logaritmo de ambos lados da entonces la ecuación en dB

$$P_{out_{dBm}} = g_{dB} + P_{in_{dBm}}$$

Estas manipulaciones tienen ciertas ventajas para las relaciones más complicadas que se verán más adelante, en las que la multiplicación y la división se convierten en adición y sustracción de cantidades en dB conocidas. Los ingenieros de comunicaciones suelen trabajar con dBm porque las potencias de las señales son bastante pequeñas en la salida de un sistema de transmisión.

Considere ahora un sistema descrito por su función de transferencia $H(f)$. Una entrada senoidal con amplitud A_x produce la amplitud de salida $A_y = |H(f)|A_x$, y las potencias **normalizadas** de las señales son $P_x = A_x^2/2$ y $P_y = A_y^2/2 = |H(f)|^2 P_x$. Estas potencias normalizadas no son por fuerza iguales a las potencias reales en la ecuación (1). Sin embargo, cuando el sistema tiene el mismo nivel de impedancia en la entrada y en la salida, la relación P_y/P_x sí es igual a P_{out}/P_{in}. Por tanto, si $H(f) = Ke^{-j\omega t_d}$, entonces

$$g = |H(f)|^2 = K^2 \qquad [5]$$

En este caso, la ganancia de potencia también se aplica a señales de *energía* en el sentido de que $E_y = gE_x$. Cuando el sistema tiene impedancias desiguales de entrada y de salida, la ganancia de potencia (y de energía) es proporcional a K^2.

Si el sistema es selectivo en frecuencia, la ecuación (5) no se cumple, pero $|H(f)|^2$ indica aún de qué manera la ganancia varía en función de la frecuencia. Para una medida útil de la dependencia de la frecuencia en función de la potencia de la señal, se toma

$$|H(f)|_{\text{dB}} \triangleq 10 \log_{10} |H(f)|^2 \qquad [6]$$

la cual representa la **ganancia relativa** en dB.

EJERCICIO 3.3-1

a) Verificar que $P_{\text{dBm}} = P_{\text{dBW}} + 30$ dB. *b)* Demostrar que si $|H(f)|_{\text{dB}} = -3$ dB, entonces $|H(f)| \approx 1/\sqrt{2}$ y $|H(f)|^2 \approx \frac{1}{2}$. El significado de este resultado se discute en la sección sobre filtros reales.

Pérdidas en la transmisión y repetidores

Cualquier medio de transmisión pasivo tiene pérdidas de potencia en vez de ganancias, ya que $P_{\text{out}} < P_{\text{in}}$. Por esta razón se prefiere trabajar con la **pérdida**, por transmisión o **atenuación**

$$L \triangleq 1/g = P_{\text{in}}/P_{\text{out}}$$

$$L_{\text{dB}} = -g_{\text{dB}} = 10 \log_{10} P_{\text{in}}/P_{\text{out}} \qquad [7]$$

Por tanto, $P_{\text{out}} = P_{\text{in}}/L$ y $P_{\text{out}_{\text{dBm}}} = P_{\text{in}_{\text{dBm}}} - L_{\text{dB}}$.

En el caso de líneas de transmisión, cables coaxiales y de fibra óptica y guías de ondas, la potencia de salida decrece *exponencialmente* con la distancia. Esta relación se escribe de la forma

$$P_{\text{out}} = 10^{-(\alpha \ell/10)} P_{\text{in}}$$

donde ℓ es la **longitud de la trayectoria** entre la fuente y el destino, y α es el **coeficiente de atenuación** en dB por unidad de longitud. La ecuación (7) se convierte entonces en

$$L = 10^{(\alpha \ell/10)} \qquad L_{\text{dB}} = \alpha \ell \qquad [8]$$

Tabla 3.3-1 Valores típicos de pérdidas de transmisión

Medio de transmisión	Frecuencia	Pérdida dB/km
Par de alambres (0.3 cm de diámetro)	1 kHz	0.05
Par de alambres trenzados (calibre 16)	10 kHz	2
	100 kHz	3
	300 kHz	6
Cable coaxial (1 cm de diámetro)	100 kHz	1
	1 MHz	2
	3 MHz	4
Cable coaxial (15 cm de diámetro)	100 MHz	1.5
Guía de onda rectangular (5 × 2.5 cm)	10 GHz	5
Guía de onda helicoidal (5 cm de diámetro)	100 GHz	1.5
Cable de fibra óptica	3.6×10^{14} Hz	2.5
	2.4×10^{14} Hz	0.5
	1.8×10^{14} Hz	0.2

mostrando que la pérdida en dB es proporcional a la longitud. En la tabla 3.3-1 se encuentran algunos valores típicos de α para diferentes medios de transmisión y distintas frecuencias.

Los valores de la atenuación en dB algunas veces ocultan la disminución radical de la potencia de la señal con la distancia. Para resaltar las implicaciones de la ecuación (8) más claramente, suponga que se transmite una señal por un cable de 30 km de longitud con $\alpha = 3$ dB/km. Entonces, $L_{\text{dB}} = 3 \times 30 = 90$ dB, $L = 10^9$ y $P_{\text{out}} = 10^{-9} P_{\text{in}}$. La duplicación de la longitud de la trayectoria duplica la atenuación a 180 dB, de manera que $L = 10^{18}$ y $P_{\text{out}} = 10^{-18} P_{\text{in}}$. ¡Esta pérdida es tan grande que se necesitaría una potencia de entrada de un megawatt (10^6 W) para obtener una potencia de salida de un picowatt (10^{-12} W)!

Una atenuación grande necesita indudablemente de *amplificación* para incrementar la señal de salida. Como ejemplo, la figura 3.3-2 representa un sistema de transmisión por cable con un amplificador de salida y un **amplificador repetidor** insertado cerca de la mitad de la trayectoria (cualquier *preamplificación* en la entrada estaría incluida en el valor de P_{in}). Puesto que las ganancias de potencia se multiplican en una conexión en cascada como ésta,

$$P_{\text{out}} = (g_1 g_2 g_3 g_4) P_{\text{in}} = \frac{g_2 g_4}{L_1 L_3} P_{\text{in}} \qquad [9a]$$

la cual se convierte en la ecuación en dB

$$P_{\text{out}} = (g_2 + g_4) - (L_1 + L_3) + P_{\text{in}} \qquad [9b]$$

Aquí no se han usado los subíndices dB para simplificar, pero la adición y la sustracción en la ecuación (9*b*) la identifican sin ambigüedades como una ecuación en dB. Por supuesto, las unidades de P_{out} (dBW o dBm) serán las mismas que las de P_{in}.

El repetidor en la figura 3.3-2 se ha colocado cerca de la mitad de la trayectoria para prevenir que la potencia de la señal caiga por debajo del nivel de ruido del amplificador. Los sistemas de cable para grandes distancias tienen repetidores con separaciones de varios kilómetros por esta razón y un enlace telefónico transcontinental podría incluir más de 2 000 repetidores. Del análisis de potencia de la señal de estos sistemas se obtiene la ecuación (9). El análisis de ruido se presenta en el apéndice.

Fibra óptica

Los sistemas ópticos de comunicación se han vuelto muy populares en las últimas dos décadas con los avances en las tecnologías de láser y fibra óptica. Como los sistemas ópticos usan frecuencias de portadora en el intervalo de 2×10^{14} Hz, las señales transmitidas tienen un ancho de banda mucho mayor del que es posible con cables metálicos tales como un par de alambres trenzados o un cable coaxial. En el próximo capítulo se

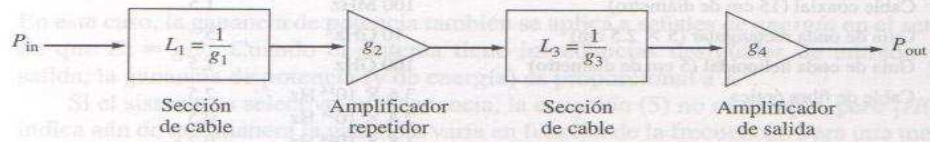


Figura 3.3-2 Sistema de transmisión por cable con un amplificador repetidor.

verá que el máximo ancho de banda teórico para esa frecuencia de portadora anda en el orden de 2×10^{13} Hz. Aunque quizá nunca se necesite un ancho de banda tan grande, es bueno saber que se cuenta con él si se necesita.

En los años sesenta, los cables de fibra óptica tenían pérdidas extremas que estaban en el orden de los 1000 dB/km y no eran prácticos para el uso comercial. En la actualidad, estas pérdidas andan en el orden de 0.2 a 2 dB/km, dependiendo del tipo de fibra usada y de la longitud de onda de la señal. Esto es inferior a las pérdidas de la mayoría de los sistemas de pares de alambres trenzados y cables coaxiales. Existen muchas ventajas en el uso de canales de fibra óptica, además del gran ancho de banda y las bajas pérdidas. La propiedad de una guía de ondas dieléctrica de la fibra óptica la hace menos susceptible a interferencias que provienen de fuentes externas. Puesto que la señal transmitida es luz y no corriente, no hay campo electromagnético que genere diafonía y tampoco energía de RF radiada que interfiera con otros canales de comunicación. Además, como los fotones en movimiento no interactúan entre ellos, no se genera ruido en el interior de la fibra óptica. Los canales de fibra óptica son más seguros de instalar y mantener, pues no hay que preocuparse por grandes voltajes o corrientes. Asimismo, como es prácticamente imposible conectarse a un canal de fibra óptica sin que el usuario lo detecte, éstos son lo suficientemente seguros para aplicaciones militares. Son robustos y flexibles y operan con variaciones de temperatura mayores que los cables metálicos. Por su tamaño pequeño (aproximadamente del diámetro de un cabello humano) y su ligereza ocupan menos espacio de almacenamiento y su transporte es más barato. Finalmente, se fabrican con arena, que es un recurso abundante. Aunque los costos iniciales de instalación son mayores, los costos a largo plazo serán inferiores a los de cables de metal.

La mayoría de los sistemas ópticos de comunicación son digitales ya que las limitaciones del sistema en la amplitud de la modulación analógica los hacen imprácticos. El sistema es un híbrido de componentes eléctricos y ópticos, pues las fuentes de señales y los receptores finales se siguen fabricando con componentes electrónicos. Los transmisores ópticos utilizan ya sea LED o láseres de estado sólido para generar pulsos de luz. La selección entre estos dos la imponen las restricciones de diseño. Los LED, que producen luz no coherente (múltiples longitudes de ondas), son robustos, de bajo costo y tienen baja potencia de salida (~0.5 mW). Los láseres son más costosos y tienen una vida más corta; sin embargo, producen luz coherente (una sola longitud de onda) y tienen una potencia de salida de alrededor de 5 mW. Los receptores son comúnmente diodos PIN o fotodiodos de avalancha (APD), dependiendo de la longitud de onda de la señal transmitida. En el resto de este análisis, la atención se pondrá en el canal de fibra óptica.

Los cables de fibra óptica tienen un **núcleo** formado por vidrio de silicio puro rodeado de una capa de **revestimiento**, por lo común de vidrio de silicio, pero algunas veces de plástico. En la mayoría de los casos hay una delgada pantalla protectora exterior de plástico. En el núcleo la señal recorre la fibra. El revestimiento reduce las pérdidas al mantener la potencia de la señal dentro del núcleo. Existen tres tipos principales de cables de fibra óptica: fibras unimodal, fibras multimodal de índice escalonado y fibras multimodal de índice gradual. La figura 3.3-3*a* muestra tres rayos de luz que recorren una fibra unimodal. Debido a que el diámetro del núcleo es lo suficientemente pequeño (~8 μm), sólo hay una trayectoria que cada uno de los rayos puede seguir conforme se propagan a lo largo de la longitud de la fibra. La diferencia en el índice de refracción entre el núcleo y las capas de revestimiento hace que la luz se refleje de

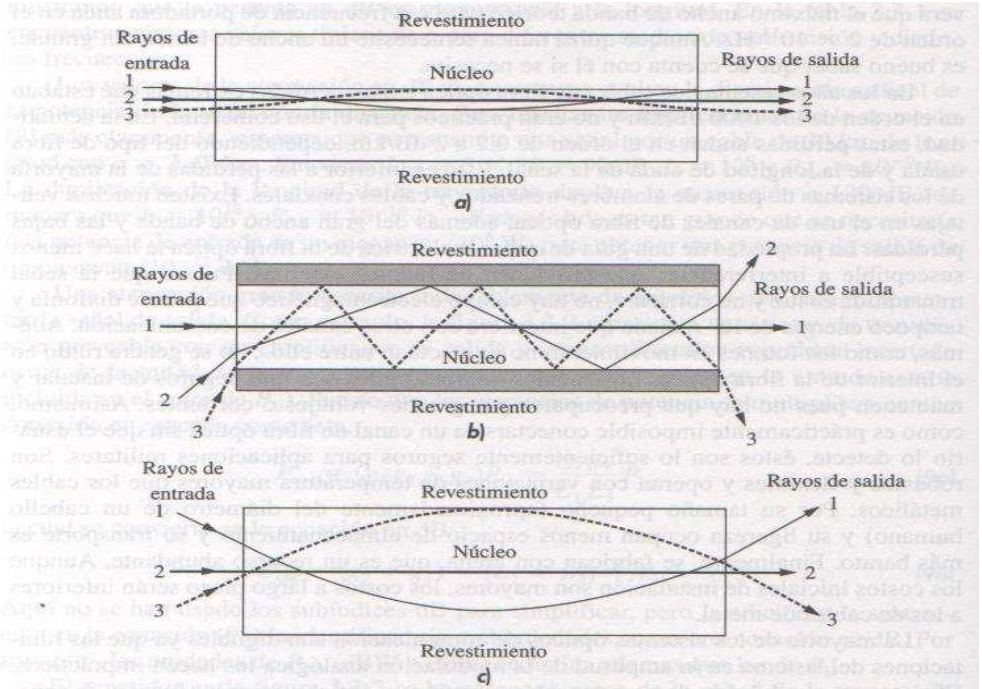


Figura 3.3-3 *a*) Propagación de luz en una fibra unimodal de índice escalonado. *b*) Propagación de luz en una fibra multimodal de índice escalonado. *c*) Propagación de luz en una fibra multimodal de índice gradual.

nuevo hacia el canal y, por ello, los rayos siguen una trayectoria recta a través de la fibra. En consecuencia, cada rayo de luz recorre la misma distancia en un lapso dado, y una entrada de pulso tendría esencialmente la misma forma en la salida. Así pues, las fibras unimodal tienen la capacidad de anchos de banda de transmisión grandes, lo que las hace muy populares para aplicaciones comerciales. Sin embargo, el pequeño diámetro del núcleo dificulta la alineación de los extremos de secciones de cables y el acoplamiento entre la fuente y la fibra, por lo que ocurren pérdidas.

Las fibras multimodal permiten trayectorias múltiples en el cable. Como el núcleo de la fibra tiene un diámetro grande (~50 μm), es más fácil empalmar y acoplar segmentos de la fibra, lo que significa menores pérdidas. Además, al canal entran más rayos de luces con ángulos diferentes. En una fibra multimodal de índice escalonado hay un cambio escalonado entre el índice de refracción del núcleo y el del revestimiento, igual que en las fibras unimodales. La figura 3.3-3*b* muestra tres rayos que entran con diferentes ángulos en una fibra multimodal de índice escalonado. Es evidente que las trayectorias de los rayos serán muy diferentes. El rayo 1 atraviesa en línea recta igual que en el caso de la fibra unimodal. El rayo 2 se refleja varias veces en la frontera entre el núcleo y el revestimiento y por ello sigue una trayectoria más larga en

el cable. El rayo 3, con múltiples reflexiones, tiene una trayectoria mucho más larga. Como se muestra en la figura 3.3–3*b*, el ángulo de incidencia influye en el tiempo de llegada al receptor. Se definen dos términos para describir este retardo en el canal. El promedio de la diferencia de tiempo entre las llegadas de los diferentes rayos se denomina **retardo de tiempo medio** y la desviación estándar se denomina **dispersión de retardo**. El impacto sobre un pulso angosto sería la ampliación del ancho del pulso conforme la señal se propaga a través del canal. Si esa ampliación excede el intervalo entre pulsos, puede haber un traslape y los pulsos no se diferenciarán en la salida. En consecuencia, el máximo ancho de banda de la señal transmitida en un canal multimodal con índice escalonado es mucho menor que en el caso unimodal.

Las fibras multimodal de índice gradual ofrecen lo mejor de ambos casos en lo que se refiere a rendimiento. El núcleo central grande tiene un índice de refracción que no es uniforme. El índice de refracción es mayor en el centro y cambia gradualmente hacia el borde externo. Como se muestra en la figura 3.3-3*c*, los rayos se propagan de nuevo a lo largo de múltiples trayectorias; sin embargo, como se refractan constantemente hay una desviación continua de los rayos de luz. La velocidad de la onda es inversamente proporcional al índice de refracción, de modo que aquellas ondas más alejadas del centro se propagan más rápido. El perfil del índice de refracción se diseña para que todas las ondas tengan aproximadamente el mismo retardo cuando lleguen a la salida. En consecuencia, la menor dispersión permite un mayor ancho de banda de transmisión. Aunque el ancho de banda de una fibra multimodal de índice gradual es menor que el de una fibra unimodal, los beneficios del mayor diámetro del núcleo son suficientes para hacerlas adecuadas en la aplicación de las comunicaciones de larga distancia.

En todos los tipos de fibras hay varios sitios en donde se presentan pérdidas, incluidos aquellos donde la fibra se conecta al transmisor o al receptor y dentro de la propia fibra. La atenuación en la fibra da como resultado básicamente pérdidas por **absorción** debidas a impurezas en el vidrio de silicio y pérdidas por **dispersión** debidas a imperfecciones en la guía de ondas. Las pérdidas aumentan exponencialmente con la distancia recorrida y también varían con la longitud de onda. Existen tres regiones de longitudes de ondas donde hay mínimos relativos en la curva de atenuación y se indican en la tabla 3.3-1. La menor cantidad de pérdidas ocurre alrededor de los 1300 y 1500 nm, y en consecuencia son estas frecuencias las que más se usan para sistemas de comunicación de larga distancia.

Las aplicaciones comerciales actuales requieren de repetidores aproximadamente cada 40 km. Sin embargo, cada año hay avances tecnológicos, de manera que esta separación continúa aumentando. Algunos amplificadores repetidores convencionales convierten la onda luminosa en una señal eléctrica, la amplifican y la convierten de nuevo en una señal óptica para retransmisión. Sin embargo, se están desarrollando amplificadores de ondas luminosas y podrían estar disponibles dentro de poco.

Los sistemas de comunicación por fibra óptica se están convirtiendo rápidamente en el estándar para las telecomunicaciones a larga distancia. Muchas residencias y múltiples edificios comerciales están siendo canalizados con fibras ópticas en forma creciente. Las compañías telefónicas de larga distancia anuncian canales claros y sin ruido con la promesa de que los usuarios serán capaces de oír incluso la caída de un alfiler. Cables submarinos de fibra óptica cubren ahora más de dos tercios de la circunferencia del globo terráqueo y manejan más de 100 000 conversaciones telefónicas a la vez. Compare esto con el primer cable transoceánico que fue un avance en 1956 y sólo tenía 36 canales de voz. Aunque los sistemas actuales manejan desde 90 Mbits/s hasta

2.5 Gbits/s, ha habido resultados experimentales tan altos como 1000 Gbits/s. En las tasas de transmisión actuales de 64 kbits/s, esto representa 15 millones de conversaciones telefónicas por una sola fibra óptica. Conforme continúa ampliándose la capacidad, sin duda se encontrarán nuevas formas de llenarla.

Transmisión de radio★

La transmisión de señales mediante la propagación de ondas de radio reduce el número requerido de repetidores y tiene la ventaja adicional de eliminar los cables largos. Aunque la radio comprende procesos de modulación descritos en capítulos posteriores, en este momento parece apropiado examinar la pérdida de transmisión para la **propagación por línea de vista** ilustrada en la figura 3.3-4, donde la onda de radio viaja en una trayectoria directa desde la antena transmisora hasta la receptora. Este modo de propagación se emplea comúnmente para comunicación a larga distancia a frecuencias superiores de casi 100 MHz.

La **pérdida de espacio libre** para una trayectoria de línea de vista se debe a la dispersión esférica de la onda de radio. Esta pérdida está dada por

$$L = \left(\frac{4\pi\ell}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{4\pi f\ell}{c}\right)^2 \qquad [10a]$$

en donde λ es la longitud de onda, f la frecuencia de la señal y c la velocidad de la luz. Si se expresa ℓ en kilómetros y f en gigahertz (10^9 Hz), la ecuación (10*a*) se convierte en

$$L_{\text{dB}} = 92.4 + 20\log_{10} f_{\text{GHz}} + 20\log_{10} \ell_{\text{km}} \qquad [10b]$$

Se ve que L_{dB} aumenta en relación con el logaritmo de ℓ, en vez de hacerlo en proporción directa con la longitud de la trayectoria. Así que, por ejemplo, el duplicar la longitud de la trayectoria aumenta las pérdidas en solamente 6 dB.

Asimismo, las antenas direccionales tienen un efecto de enfoque que actúa como amplificación en el sentido de que

$$P_{\text{out}} = \frac{g_T g_R}{L} P_{\text{in}} \qquad [11]$$

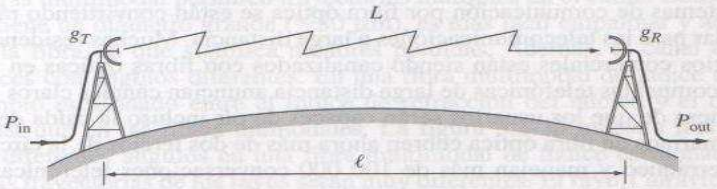


Figura 3.3-4 Transmisión de radio por línea de vista.

donde g_T y g_R representan las ganancias de las antenas en el transmisor y el receptor. La ganancia máxima de transmisión o de recepción de una antena con un **área de apertura** A_e es

$$g = \frac{4\pi A_e}{\lambda^2} = \frac{4\pi A_e f^2}{c^2} \qquad [12]$$

donde $c \approx 3 \times 10^5$ km/s. El valor de A_e para una antena de cuerno alimentador o parabólica es aproximadamente igual a su área física, y los platos parabólicos grandes pueden proporcionar ganancias en exceso de 60 dB.

Las estaciones comerciales de radio suelen usar compresión para producir una señal transmitida que tiene una potencia mayor, pero que no excede la región lineal de operación del sistema. Como se mencionó en la Sec. 3.2, la compresión proporciona mayor amplificación de las señales de bajo nivel y las eleva por encima del nivel de ruido del fondo. Sin embargo, como su aparato de radio no tiene un expansor interno para completar el proceso de compansión, se puede tener alguna distorsión. Para enfrentar esto, las compañías de producción de música a menudo preprocesan los materiales enviados a las estaciones para asegurar la integridad del sonido deseado.

Los satélites emplean transmisión de radio por línea de vista en distancias muy grandes. Tienen una amplia área de cobertura y alcanzan regiones no cubiertas por cables o fibras, incluyendo plataformas móviles como barcos y aviones. Aun cuando los sistemas de fibra óptica están transportando una cantidad creciente de tráfico telefónico transoceánico (y pueden ocasionar obsolescencia de los satélites en muchas aplicaciones), los relevos satelitales todavía manejan la mayor parte de las telecomunicaciones de distancias muy grandes. Los relevos satelitales también posibilitan la transmisión transoceánica de señales de TV. Éstos tienen un ancho de banda amplio de aproximadamente 500 MHz que se subdivide para el uso por transpónders individuales. La mayoría de los satélites están en órbitas geoestacionarias; esto significa que están en sincronía con la rotación de la Tierra, situados directamente encima del ecuador; por ello parecen estacionarios en el cielo. La ventaja principal es que las antenas terrestres que apuntan hacia los satélites permanecen fijas.

Un satélite típico de banda C tiene una frecuencia de enlace ascendente de 6 GHz, una frecuencia de enlace descendente de 4 GHz y 12 transpónders, cada uno con un ancho de banda de 36 MHz. Entre las ventajas de usar esta banda de frecuencias están: permitir el uso de equipo de microondas de costo relativamente bajo, tener baja atenuación causada por la lluvia (la causa atmosférica principal de pérdida de la señal) y tener un bajo ruido de fondo celeste. Sin embargo, puede haber interferencia severa proveniente de sistemas de microondas terrestres, de modo que muchos satélites usan ahora la banda Ku. Las frecuencias de esta banda son 14 GHz para el enlace ascendente y 12 GHz para el enlace descendente. Esto hace posible la utilización de antenas más pequeñas y menos costosas. Los satélites de la banda C se usan generalmente para sistemas comerciales de TV por cable, mientras que la banda Ku se usa para videoconferencias. Un nuevo servicio que permite la transmisión directa de satélites (DBS) para servicio de televisión residencial usa 17 GHz para el enlace ascendente y 12 GHz para el enlace descendente.

Por su misma naturaleza, los satélites requieren de múltiples usuarios para que éstos tengan acceso desde diferentes puntos al mismo tiempo. Se ha desarrollado una variedad de técnicas de **acceso múltiple** y se discutirán en un capítulo posterior. Los aparatos de comunicación personal, como los teléfonos celulares, se basan en técnicas de acceso múltiple, por ejemplo, el acceso múltiple por división de tiempo (TDMA) y

el acceso múltiple por división de código (CDMA). El retardo en la propagación es un problema en largas distancias para la comunicación de voz y requiere quizá de la cancelación de eco en el canal.

La tecnología actual permite a los sistemas portátiles de satélites desplazarse a sitios donde se esté desarrollando un evento. De hecho, todo el equipo se acomoda en un camión o en varias cajas grandes que se transportan en un avión. Para un repaso completo y práctico sobre los satélites, véase Tomasi (1994), capítulo 18.

EJEMPLO 3.3-1 **Sistema de relevo satelital**

La figura 3.3-5 muestra un sistema transoceánico de televisión simplificado con un relevo satelital que sirve como repetidor. El satélite está en una órbita estacionaria y a una distancia de aproximadamente 22 300 millas (36 000 km) sobre el ecuador. La frecuencia del enlace ascendente es de 6 GHz y la frecuencia del enlace descendente es de 4 GHz. La ecuación (10b) da una pérdida en la trayectoria ascendente

$$L_u = 92.4 + 20 \log_{10} 6 + 20 \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 199.1 \text{ dB}$$

y una pérdida en el enlace descendente

$$L_d = 92.4 + 20 \log_{10} 4 + 20 \log_{10} 3.6 \times 10^4 = 195.6 \text{ dB}$$

en vista de que la distancia desde las torres del transmisor y del receptor hasta el satélite es aproximadamente igual a la distancia desde la Tierra al satélite. Las ganancias de las antenas en dB se dan en el dibujo con los subíndices identificando las diferentes funciones; por ejemplo, g_{RU} representa la ganancia de la antena receptora en el enlace desde la Tierra hasta el satélite. El satélite tiene un amplificador repetidor que produce una salida típica de 18 dBW. Si la potencia de entrada al transmisor es de 35 dBW, la potencia recibida

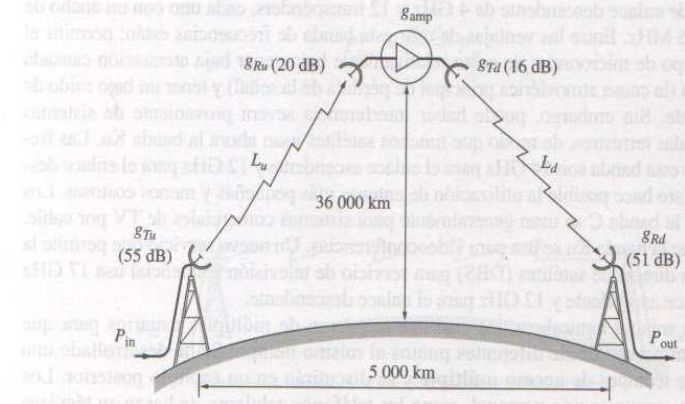


Figura 3.3-5 Sistema de relevo satelital.

en el satélite es de 35 dBW + 55 dB − 199.1 dB + 20 dB = −144.1 dBW. La salida de potencia en el receptor es de 18 dBW + 16 dB − 195.6 dB + 51 dB = −110.6 dBW. Invirtiendo la ecuación (4) da

$$P_{out} = 10^{(-100.6/10)} \times 1\ \text{W} = 8.7 \times 10^{-12}\ \text{W}$$

Estos niveles de potencia tan pequeños son típicos para los sistemas satelitales.

EJERCICIO 3.3-2

Un sistema de cable de 40 km tiene una $P_{in} = 2$ W, y un repetidor con una ganancia de 64 dB se coloca a 24 km de la entrada. Las secciones del cable tienen una $\alpha = 2.5$ dB/km. Úsense las ecuaciones en dB para determinar la potencia de la señal en: *a*) la entrada del repetidor; *b*) la salida final.

3.4 FILTROS Y FILTRADO

Prácticamente, todo sistema de comunicación incluye uno o más filtros con el propósito de separar entre una señal portadora de información y contaminaciones indeseadas, como interferencia, ruido y productos de distorsión. En esta sección se definirá cuáles son los filtros ideales, se describirán las diferencias entre filtros reales e ideales y se examinará el efecto del filtrado sobre las señales pulsantes.

Filtros ideales

Por definición, un filtro ideal posee características de transmisión sin distorsión en una o más bandas de frecuencias especificadas y una respuesta igual a cero para las otras frecuencias. En particular, la función de transferencia de un filtro ideal **pasabanda** (BPF) es

$$H(f) = \begin{cases} Ke^{-j\omega t_d} & f_\ell \le |f| \le f_u \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \qquad [1]$$

como se grafica en la figura 3.4-1. Los parámetros f_ℓ y f_u son las **frecuencias de corte** inferior y superior, respectivamente, ya que éstas marcan los puntos extremos en la **banda de paso**. El **ancho de banda** del filtro es

$$B = f_u - f_\ell$$

el cual se mide en términos de la porción de frecuencia positiva de la banda de paso.

En forma similar, un filtro ideal **pasabajas** (LPF) se define por la ecuación (1) con $f_\ell = 0$, tal que $B = f_u$, mientras que un filtro ideal **pasaaltas** (HPF) tiene $f_\ell > 0$ y $f_u = \infty$. Los filtros ideales de **rechazo de banda** o filtros de **ranura** proporcionan transmisión sin distorsión en todas las frecuencias excepto en alguna **banda de supresión**, digamos $f_\ell \le |f| \le f_u$, donde $H(f) = 0$.

Empero, todos estos filtros son físicamente **irrealizables** en el sentido de que sus características no se obtienen con un número finito de elementos. No se dará la demostración general de esta afirmación. En vez de ello, se ofrecerá un argumento plausible basado en la respuesta al impulso.

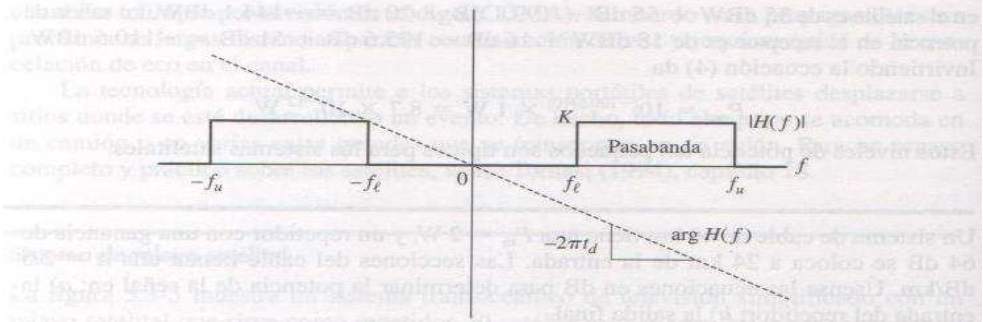


Figura 3.4-1 Función de transferencia de un filtro ideal pasabanda.

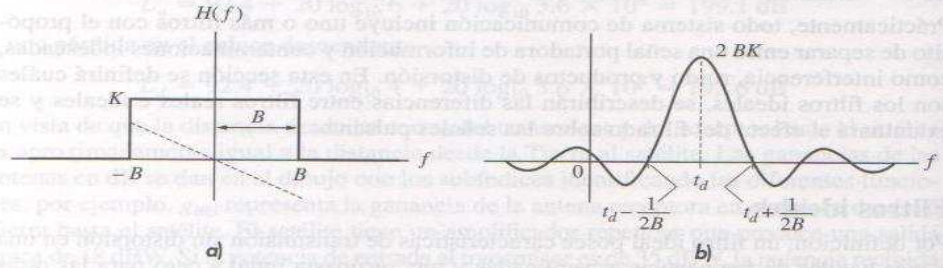


Figura 3.4-2 Filtro ideal pasabajas. *a*) Función de transferencia; *b*) respuesta al impulso.

Considérese un LPF ideal cuya función de transferencia, mostrada en la figura 3.4-2*a*, se escribe como

$$H(f) = Ke^{-j\omega t_d}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \qquad [2a]$$

Su respuesta al impulso será

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(f)] = 2BK\ \text{sinc}\ 2B(t - t_d) \qquad [2b]$$

la cual se dibuja en la figura 3.4-2*b*. Puesto que $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$ y $h(t)$ tiene valores diferentes de cero para $t < 0$, la *salida aparece antes de que se aplique la entrada*. Se dice que este filtro es **anticipatorio** o **no causal** y la porción de la salida que aparece antes que la entrada se denomina **precursor**. Sin duda, este comportamiento es físicamente imposible y por eso el filtro no es realizable. Resultados semejantes se cumplen para los filtros BPF y HPF ideales.

Aunque sean ficticios, los filtros ideales tienen gran valor conceptual en el estudio de los sistemas de comunicación. Además, muchos filtros reales se aproximan bastante al comportamiento ideal.

EJERCICIO 3.4-1

Demuéstrese que la respuesta al impulso de un BPF ideal es

$$h(t) = 2BK \operatorname{sinc} B(t - t_d) \cos \omega_c(t - t_d)$$

donde $\omega_c = \pi(f_\ell + f_u)$.

Limitación en banda y limitación en tiempo

Se mencionó ya que una señal $v(t)$ está *limitada en banda* si existe alguna constante W tal que

$$V(f) = 0 \qquad |f| > W$$

Por tanto, el espectro no contiene nada fuera de $|f| > W$. De forma parecida, una señal **limitada en tiempo** está definida por la propiedad de que, para las constantes $t_1 < t_2$,

$$v(t) = 0 \qquad t < t_1 \text{ y } t > t_2$$

En consecuencia, la señal "comienza" en $t \geq t_1$ y "termina" en $t \leq t_2$. Examínense estas dos definiciones a la luz de filtros reales respecto de filtros ideales.

Los conceptos de filtrado ideal y de señales limitadas en banda están ligados, ya que la aplicación de una señal a un LPF ideal produce en la salida una señal limitada en banda. Se ha visto también que la respuesta al impulso de un LPF ideal es un pulso sinc que permanece durante todo el tiempo. Ahora se afirma que cualquier señal que salga de un filtro LPF ideal existirá para todo el tiempo. En consecuencia, una señal estrictamente limitada en banda no está limitada en tiempo. Inversamente, por dualidad, una señal estrictamente limitada en tiempo no está limitada en banda. Todos los pares de transformadas que se han encontrado sustentan estas afirmaciones y una demostración general la ofrecen Wozencraft y Jacobs (1965, apéndice 5B). Así que

La limitación en banda y la limitación en tiempo son mutuamente incompatibles.

Esta observación genera preocupación acerca de los modelos de señales y filtros en el estudio de los sistemas de comunicación. Como una señal no puede estar limitada en banda ni limitada en tiempo a la vez, se deben abandonar las señales limitadas en banda (y los filtros ideales) o bien se deben aceptar modelos de señales que existen todo el tiempo. Por otra parte, hay que reconocer que cualquier señal real está limitada en tiempo y tiene tiempos de comienzo y de conclusión. Asimismo, los conceptos de espectros limitados en banda y filtros ideales son demasiado útiles y sugerentes para no tomarlos en cuenta completamente.

La solución a este dilema no es en realidad tan difícil y requiere de un pequeño compromiso. Aunque una señal estrictamente limitada en tiempo no está estrictamente limitada en banda, su espectro puede ser despreciablemente pequeño por encima de alguna frecuencia límite superior W. De la misma forma, una señal estrictamente limitada en banda puede ser despreciablemente pequeña fuera de cierto intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$. En consecuencia, para la mayoría de los propósitos prácticos, con frecuencia se supondrá que las señales están a la vez limitadas en banda y limitadas en tiempo.

Filtros reales

El diseño de filtros realizables que se aproximen al comportamiento ideal es un tema avanzado que está fuera del objetivo de este texto. Pero por lo menos deben mirarse las principales diferencias entre los filtros reales y los ideales para comprender algo de las aproximaciones implicadas por las suposiciones que se hacen para un filtro ideal. Información adicional sobre el diseño e implantación de filtros puede hallarse en textos tales como el de Van Valkenburg (1982).

Para comenzar esta discusión, la figura 3.4-3 muestra la razón de amplitud para un filtro real pasabanda típico. Comparada con el BPF ideal de la figura 3.4-1, se ve una pasabanda donde $|H(f)|$ es relativamente grande (pero no constante) y bandas de supresión donde $|H(f)|$ es bastante pequeña (pero no igual a cero). Los puntos extremos de la pasabanda usualmente están definidos por

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(f)|_{\text{máx}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \qquad f = f_\ell, f_u \qquad [3]$$

de modo que $|H(f)|^2$ no cae por debajo de $K^2/2$ para $f_\ell \leq |f| \leq f_u$. El ancho de banda $B = f_u - f_\ell$ se llama entonces ancho de banda de **media potencia** o de 3 dB. Del mismo modo, los puntos extremos de las bandas de supresión se toman donde $|H(f)|$ cae a un valor pequeño adecuado, por ejemplo, $K/10$ o $K/100$.

Entre la pasabanda y las bandas de supresión están las regiones de **transición**, mostradas sombreadas, donde el filtro ni "pasa" ni "rechaza" componentes de frecuencia. Por tanto, el filtrado efectivo de la señal a menudo depende de tener un filtro con regiones de transición muy angostas. Se estudiará este aspecto un poco más examinando un tipo particular de filtro con cierto detalle. Después se describirán otros diseños populares.

El más sencillo de los filtros estándares es el LPF **Butterworth** de orden n-ésimo, cuyo circuito contiene n elementos reactivos (capacitores e inductores). La función de transferencia con $K = 1$ tiene la forma

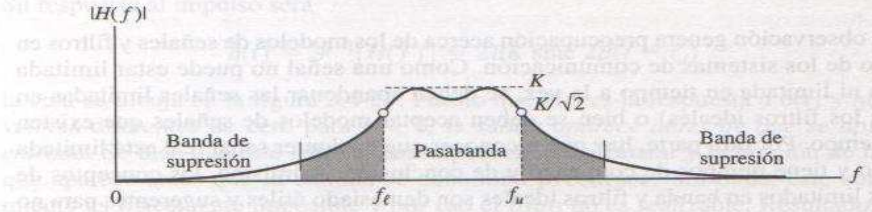


Figura 3.4-3 Razón de amplitud típica de un filtro real de pasabanda.

$$H(f) = \frac{1}{P_n(jf/B)} \qquad [4a]$$

donde B es el ancho de banda a 3 dB y $P_n(jf/B)$ es un polinomio complejo. La familia de polinomios de Butterworth está definida por la propiedad

$$|P_n(jf/B)|^2 = 1 + (f/B)^{2n}$$

tal que

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/B)^{2n}}} \qquad [4b]$$

Por consiguiente, las primeras n derivadas de $|H(f)|$ son iguales a cero en $f = 0$ y se dice que $|H(f)|$ es **máximamente plana**. En la tabla 3.4-1 viene una lista de los polinomios de Butterworth para $n = 1$ hasta 4, usando la variable normalizada $p = jf/B$.

Un filtro Butterworth de primer orden tiene las mismas características que un filtro RC pasabaja y sería una pobre aproximación a un LPF ideal. Pero la aproximación mejora conforme se aumenta n añadiendo más elementos al circuito. Por ejemplo, en la figura 3.4-4*a* se presenta la respuesta al impulso de un filtro de tercer orden, la cual tiene un parecido obvio con la de un LPF ideal, sin los precursores, por supuesto. Las curvas de la respuesta en frecuencia de este filtro se bosquejan en la figura 3.4-4*b*. Obsérvese que el desplazamiento de fase tiene una pendiente razonablemente lineal en la pasabanda, implicando retardo de tiempo más alguna distorsión de retardo.

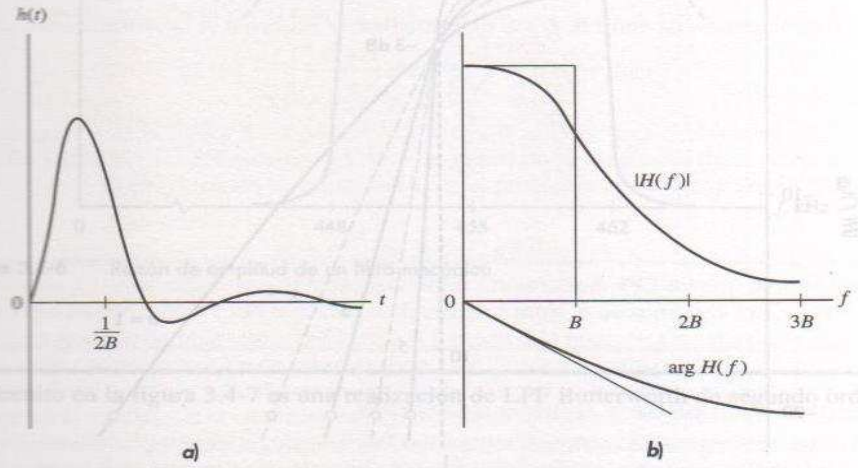


Figura 3.4-4 LPF Butterworth de tercer orden. *a*) Respuesta al impulso; *b*) función de transferencia.

Tabla 3.4-1 Polinomios de Butterworth

n	$P_n(p)$
1	$1 + p$
2	$1 + \sqrt{2}\,p + p^2$
3	$(1 + p)(1 + p + p^2)$
4	$(1 + 0.765p + p^2)(1 + 1.848p + p^2)$

Se obtiene una imagen más clara de la razón de amplitud en la región de transición a partir de un **diagrama de Bode**, construido al graficar $|H(f)|$ en dB *versus* f en una escala logarítmica. La figura 3.4-5 muestra el diagrama de Bode para filtros Butterworth pasabajas con diferentes valores de n. Si se define el borde de la banda de supresión en $|H(f)| = -20$ dB, el ancho de la región de transición cuando $n = 1$ es $10B - B = 9B$, pero sólo $1.25B - B = 0.25B$ cuando $n = 10$. Claramente, $|H(f)|$ tiende a la característica cuadrada ideal en el límite conforme $n \to \infty$. Al mismo tiempo, sin embargo, la pendiente del desplazamiento de fase (no mostrada) aumenta con n y la distorsión de retardo se puede hacer inaceptablemente grande.

En situaciones en las que la potencial distorsión de retardo es preocupante, un filtro de **Bessel-Thomson** sería la elección preferida. Esta clase de filtros se caracteriza por un **desplazamiento de fase máximamente lineal** para un valor de n dado, pero tiene una región de transición más ancha. En el otro extremo, la clase de filtros de **equirizado**

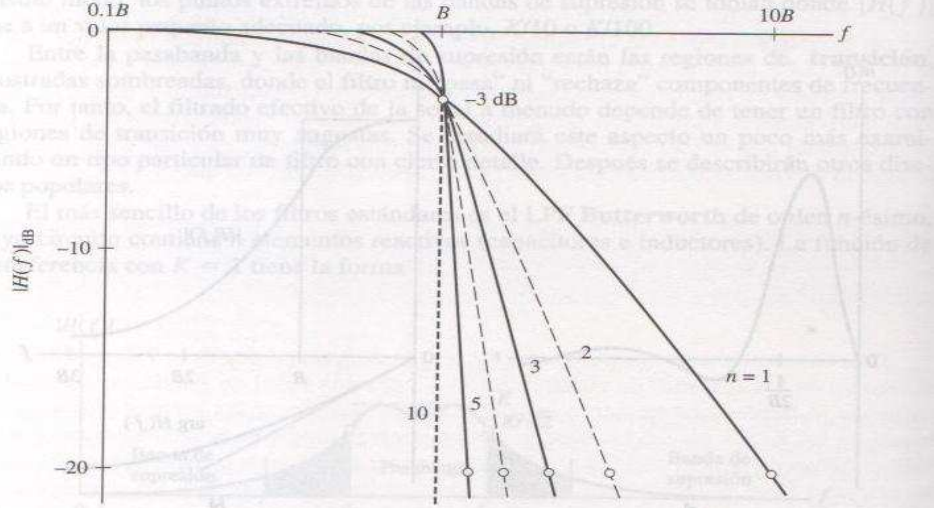


Figura 3.4-5 Diagrama de Bode para filtros Butterworth de pasabaja.

(incluidos los filtros de Chebyshev y elípticos) proporciona la transición más abrupta para un valor de n dado; pero estos filtros tienen rizos de pequeña amplitud en la banda de paso y un desplazamiento de fase significativamente no lineal. Los filtros de equirizado serían satisfactorios en aplicaciones de audio, por ejemplo, mientras que las aplicaciones con pulsos podrían necesitar de los filtros de Bessel-Thomson por el rendimiento transitorio superior.

Estas tres clases de filtros se realizan con dispositivos activos (como amplificadores operacionales, por ejemplo) que eliminan la necesidad de inductores voluminosos. Los diseños de **filtros de capacitores conmutados** van aún más allá y eliminan resistores que ocuparían demasiado espacio en un circuito integrado de gran escala. Asimismo, las tres clases se modifican para obtener filtros pasaaltas o pasabandas. Sin embargo, surgen algunos problemas de realización práctica cuando se desea un filtro pasabanda con una banda de paso angosta pero relativamente cuadrada. Para esas aplicaciones se han desarrollado diseños especiales que emplean fenómenos electromecánicos. Por ejemplo, la figura 3.4-6 muestra la razón de amplitud de un BPF de cristal monolítico de séptimo orden para uso en radio AM.

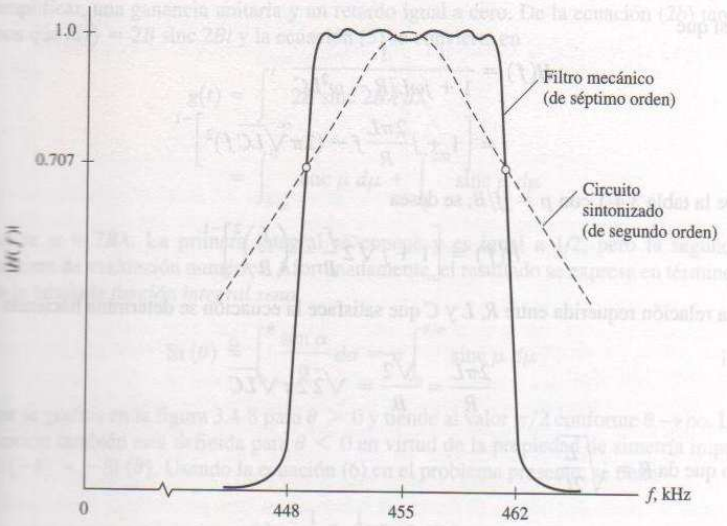


Figura 3.4-6 Razón de amplitud de un filtro mecánico.

EJEMPLO 3.4-1

El circuito en la figura 3.4-7 es una realización de LPF Butterworth de segundo orden

$$B = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

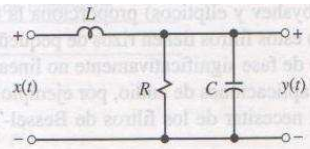


Figura 3.4-7 LPF Butterworth de segundo orden.

Se obtiene una expresión para la función de transferencia como

$$H(f) = \frac{Z_{RC}}{Z_{RC} + j\omega L}$$

donde

$$Z_{RC} = \frac{R/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

Así que

$$H(f) = \frac{1}{1 + j\omega L/R - \omega^2 LC}$$

$$= \left[1 + j\frac{2\pi L}{R}f - (2\pi\sqrt{LC}f)^2\right]^{-1}$$

De la tabla 3.4-1 con $p = jf/B$, se desea

$$H(f) = \left[1 + j\sqrt{2}\frac{f}{B} - \left(\frac{f}{B}\right)^2\right]^{-1}$$

La relación requerida entre R, L y C que satisface la ecuación se determina haciendo

$$\frac{2\pi L}{R} = \frac{\sqrt{2}}{B} = \sqrt{2}\,2\pi\sqrt{LC}$$

lo que da $R = \sqrt{\dfrac{L}{2C}}$

EJERCICIO 3.4-2 Demuéstrese que un LPF Butterworth tiene una $|H(f)|_{\text{dB}} \approx -20n \log_{10}(f/B)$ cuando $f > B$. Luego determínese el valor mínimo de n para que $|H(f)| \leq 1/10$ para $f \geq 2B$.

Respuesta al pulso y tiempo de subida

Un pulso rectangular, o cualquier otra señal con transición abrupta, contiene componentes significativas de alta frecuencia que se atenuarán o eliminarán por medio de un filtro pasabajas. En consecuencia, el filtrado de pulsos produce un efecto de suaviza-

miento o cambio que debe estudiarse en el dominio del tiempo. El estudio de la respuesta al pulso que se hace aquí conduce a información útil sobre los sistemas de transmisión de pulsos.

Es pertinente comenzar cuando la señal de entrada es un escalón unitario $x(t) = u(t)$, la cual podría representar el borde frontal de un pulso rectangular. En función de la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro, la respuesta al escalón será

$$g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)u(t-\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{t} h(\lambda)\,d\lambda \qquad [5]$$

puesto que $u(t-\lambda) = 0$ para $\lambda > t$. En los ejemplos 3.1-1 y 3.1-2 se vio, entre otros aspectos, que un filtro pasabajas de primer orden tiene una respuesta

$$g(t) = (1 - e^{-2\pi Bt})u(t)$$

donde B es el ancho de banda de 3 dB.

Desde luego, un LPF de primer orden no restringe severamente la transmisión de alta frecuencia. De modo que yendo al caso extremo de un LPF ideal, se toma, para simplificar, una ganancia unitaria y un retardo igual a cero. De la ecuación (2*b*) tenemos que $h(t) = 2B$ sinc $2Bt$ y la ecuación (5) se convierte en

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} 2B \text{ sinc } 2B\lambda\,d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \text{sinc } \mu\,d\mu + \int_{0}^{2Bt} \text{sinc } \mu\,d\mu$$

donde $\mu = 2B\lambda$. La primera integral se conoce y es igual a 1/2, pero la segunda requiere de evaluación numérica. Afortunadamente, el resultado se expresa en términos de la tabulada *función integral seno*

$$\text{Si}(\theta) \triangleq \int_0^{\theta} \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha}\,d\alpha = \pi \int_0^{\theta/\pi} \text{sinc } \mu\,d\mu \qquad [6]$$

que se grafica en la figura 3.4-8 para $\theta > 0$ y tiende al valor $\pi/2$ conforme $\theta \to \infty$. La función también está definida para $\theta < 0$ en virtud de la propiedad de simetría impar $\text{Si}(-\theta) = -\text{Si}(\theta)$. Usando la ecuación (6) en el problema presente, se tiene

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{Si}(2\pi Bt) \qquad [7]$$

obtenida al hacer $\theta/\pi = 2Bt$.

Para fines de comparación, la figura 3.4-9 muestra la respuesta al escalón de un LPF ideal junto con la de un LPF de primer orden. El LPF ideal elimina completamente todas las altas frecuencias $|f| > B$, produciendo *precursores, sobrepaso* y *oscilaciones* en la respuesta al escalón (esta conducta es la misma que la del fenómeno de Gibbs ilustrada en la figura 2.1-10 y en el ejemplo 2.4-2). Ninguno de estos efectos aparece en la respuesta del LPF de primer orden, la cual se atenúa gradualmente pero no elimina las altas frecuencias. La respuesta al escalón de un filtro más selectivo —un LPF Butterworth de

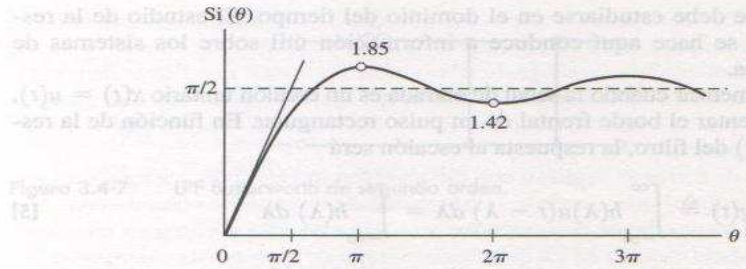


Figura 3.4-8 La función integral seno.

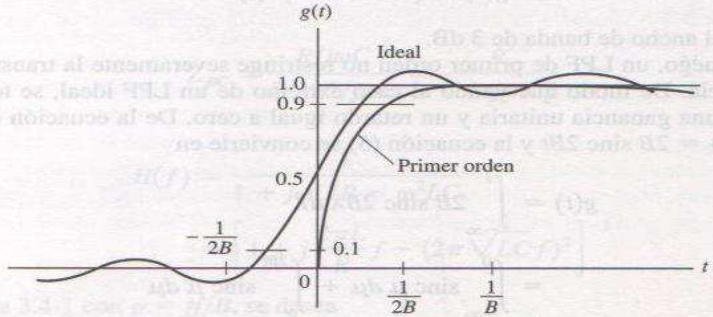


Figura 3.4-9 Respuestas de filtros pasabajas ideal y de primer orden.

tercer orden, por ejemplo— se parecería mucho más a una versión retardada de la respuesta del LPF ideal.

Antes de continuar con la respuesta al pulso, hay una conclusión importante que debe deducirse de la figura 3.4-9 relacionada con el **tiempo de subida**. El tiempo de subida es una medida de la "rapidez" de una respuesta a un escalón, comúnmente definido como el intervalo de tiempo t_r entre $g(t) = 0.1$ y $g(t) = 0.9$ y conocido como el tiempo de subida de 10-90%. El tiempo de subida de un filtro pasabajas de primer orden se calcula a partir de $g(t)$ como $t_r \approx 0.35/B$, mientras que el filtro ideal tiene un $t_r \approx 0.44/B$. Ambos valores están razonablemente cerca de 0.5/B, por lo que se usará la aproximación

$$t_r \approx \frac{1}{2B} \qquad [8]$$

para el tiempo de subida de un filtro pasabajas arbitrario con ancho de banda B.

Al trabajar con la respuesta al escalón se tienen beneficios inmediatos en el cálculo de la respuesta al pulso si se toma la señal de entrada como un pulso rectangular de altura unitaria con duración τ y comenzando en $t = 0$. Entonces se escribe

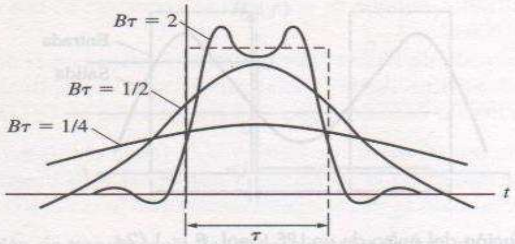


Figura 3.4-10 Respuesta al pulso de un LPF ideal.

$$x(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

y por tanto

$$y(t) = g(t) - g(t - \tau)$$

la cual se deduce por superposición.

Usando $g(t)$ de la ecuación (7), se obtiene la respuesta al pulso de un LPF ideal como

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\{\text{Si}\,(2\pi Bt) - \text{Si}\,[2\pi B(t-\tau)]\} \qquad [9]$$

que se grafica en la figura 3.4-10 para tres valores del producto $B\tau$. La respuesta tiene una forma más o menos rectangular cuando $B\tau \geq 2$, en tanto que se suaviza y dispersa mucho si $B\tau \leq \frac{1}{4}$. El caso intermedio $B\tau = \frac{1}{2}$ da un pulso de salida reconocible, mas no rectangular. Se obtienen las mismas conclusiones a partir de la respuesta al pulso de un filtro pasabajas de primer orden previamente dibujada en la figura 3.1-3, y se cumplirían resultados similares para otras formas de pulsos de entrada y otras características de filtros pasabajas.

Ahora está uno en posición de hacer algunos comentarios sobre los *requerimientos del ancho de banda para la transmisión de pulsos*. La reproducción de la verdadera forma del pulso requiere de un ancho de banda grande, digamos

$$B \gg \frac{1}{\tau_{\min}}$$

donde $\tau_{\min}$ representa la menor duración del pulso de salida. Pero si sólo se necesita *detectar* que se ha enviado un pulso o quizá medir la amplitud del pulso, basta con el ancho de banda menor

$$B \geq \frac{1}{2\tau_{\min}} \qquad [10]$$

una regla empírica fácil e importante.

La ecuación (10) también da la condición para distinguir entre, o *resolver*, pulsos de salida separados por $\tau_{\min}$ o más. La figura 3.4-11 muestra la condición de resolución para un canal pasabajas ideal con $B = \frac{1}{2}\tau$. Un ancho de banda menor o una menor separación resultaría en un traslape considerable, dificultando la identificación de pulsos separados.

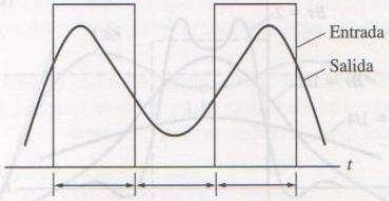


Figura 3.4-11 Resolución del pulso de un LPF ideal, $B = 1/2\tau$.

Además de la detección y resolución del pulso, ocasionalmente se hablará de la *posición del pulso* medida con respecto a algún tiempo de referencia. Estas mediciones tienen una ambigüedad inherente debido a la forma redondeada del pulso de salida y al tiempo de subida diferente de cero de los bordes delantero y trasero. Para un tiempo de subida mínimo especificado, la ecuación (8) da el requerimiento del ancho de banda

$$B \geq \frac{1}{2t_{r_{\min}}} \qquad [11]$$

otra regla empírica útil.

En la discusión anterior se ha supuesto tácitamente que el canal de transmisión tiene características de desplazamiento de fase satisfactorias. Si no las tiene, la distorsión de retardo resultante podría inutilizar el canal para la transmisión de pulsos, independientemente del ancho de banda. Por tanto, los requisitos para el ancho de banda en las ecuaciones (10) y (11) implican la estipulación adicional de un desplazamiento de fase casi lineal en $|f| \leq B$. Se podría necesitar una red de compensación de fase para cumplir con esta condición.

EJERCICIO 3.4-3 Cierta señal está formada por pulsos cuya duración varía de 10 a 25 μs; los pulsos ocurren en instantes aleatorios, pero un pulso dado siempre comienza por lo menos 30 μs después del tiempo de inicio del pulso anterior. Determine el ancho de banda mínimo requerido para la detección y resolución de pulsos y estime el tiempo de subida resultante en la salida.

3.5 FILTROS DE CUADRATURA Y TRANSFORMADA DE HILBERT

La transformada de Fourier sirve para la mayoría de las necesidades que se estudian aquí acerca de las señales filtradas ya que, en casi todas ellas, se está interesado en la separación de señales basadas en su contenido de frecuencia. No obstante, hay ocasiones en que la separación de las señales es más conveniente basándonos en la fase. Para estas aplicaciones se usará la transformada de Hilbert, que se introducirá en conjunto

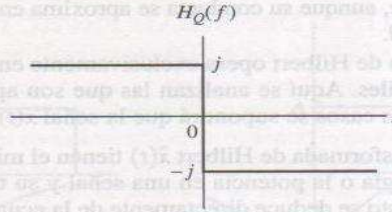


Figura 3.5-1 Función de transferencia de un desplazador de fase de cuadratura.

con el filtrado de cuadratura. En el capítulo 4 se usará la transformada de Hilbert en el estudio de dos aplicaciones importantes: la generación de modulación de amplitud de banda lateral única y la representación matemática de señales de pasabandas.

Un **filtro de cuadratura** es una red pasatodo que simplemente desplaza la fase de las componentes de frecuencias positivas por $-90°$ y las de frecuencias negativas por $+90°$. Puesto que un desplazamiento de fase de $\pm 90°$ es equivalente a multiplicar por $e^{\pm j90°} = \pm j$, la función de transferencia se escribe en términos de la función signo como

$$H_Q(f) = -j \operatorname{sgn} f = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases} \qquad [1a]$$

la cual se grafica en la figura 3.5-1. La respuesta al impulso correspondiente es

$$h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \qquad [1b]$$

Este resultado se obtiene aplicando la dualidad a $\mathcal{F}[\operatorname{sgn} t] = 1/j\pi f$, lo cual da $\mathcal{F}[1/j\pi t] = \operatorname{sgn}(-f) = -\operatorname{sgn} f$, de modo que $\mathcal{F}^{-1}[-j \operatorname{sgn} f] = j/j\pi t = 1/\pi t$.

Ahora sea $x(t)$ una señal de entrada arbitraria a un filtro de cuadratura. La señal de salida $y(t) = x(t) * h_Q(t)$ se definirá como **transformada de Hilbert** de $x(t)$, denotada por $\hat{x}(t)$; esto es,

$$\hat{x}(t) \triangleq x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda}\, d\lambda \qquad [2]$$

Observe que la transformación de Hilbert es una *convolución* y no cambia el dominio, de modo que $x(t)$ y $\hat{x}(t)$ son funciones del tiempo. Aun así, es fácil escribir el espectro de $\hat{x}(t)$, vale decir

$$\mathcal{F}[\hat{x}(t)] = (-j \operatorname{sgn} f) X(f) \qquad [3]$$

ya que el desplazamiento de fase produce el espectro de salida $H_Q(f)X(f)$.

El catálogo de pares de transformadas de Hilbert es bastante corto en comparación con el de las transformadas de Fourier, y la transformada de Hilbert ni siquiera existe para muchos modelos de señales comunes. Matemáticamente, la dificultad deriva de las singularidades potenciales en la ecuación (2) cuando $\lambda = t$ y el integrando se hace indefinido. Físicamente, de la ecuación (1*b*) se ve que $h_Q(t)$ es *no causal*, lo cual significa que el filtro

de cuadratura es *irrealizable*, aunque su conducta se aproxima en una banda finita de frecuencias usando una red real.

Si bien la transformada de Hilbert opera exclusivamente en el dominio del tiempo, tiene varias propiedades útiles. Aquí se analizan las que son aplicables a los intereses de este estudio. En todos los casos se supondrá que la señal $x(t)$ es real.

1. Una señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ tienen el mismo espectro de amplitudes. Además, la energía o la potencia en una señal y su transformada de Hilbert son también iguales. Esto se deduce directamente de la ecuación (3) ya que $|-j \operatorname{sgn} f| = 1$ para toda f.
2. Si $\hat{x}(t)$ es la transformada de Hilbert de $x(t)$, entonces $-x(t)$ es la transformada de Hilbert de $\hat{x}(t)$. Los detalles de demostrar esta propiedad se dejan como ejercicio; sin embargo, se deduce que dos desplazamientos sucesivos de 90° dan como resultado un desplazamiento total de 180°.
3. Una señal $x(t)$ y su transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ son ortogonales. En la Sec. 3.6 se demostrará que esto significa que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)\, dt = 0 \text{ para señales de energía}$$

y

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\hat{x}(t)\, dt = 0 \text{ para señales de potencia}$$

EJEMPLO 3.5-1 **Transformada de Hilbert de una señal coseno**

El par de transformadas de Hilbert más sencillo y más obvio se deduce directamente de la propiedad de desplazamiento del filtro de cuadratura. Específicamente, si la entrada es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

entonces

$$\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn} f X(f) = \frac{-jA}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \operatorname{sgn} f$$

$$= \frac{A}{2j} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

y $\hat{x}(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi)$.

Este par de transformadas se usa para determinar la transformada de Hilbert de cualquier señal que esté constituida por una suma de senoidales. No obstante, la mayoría de las otras transformadas de Hilbert incluyen el cálculo de la operación de convolución en la ecuación (2), como lo ilustra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3.5-2 **Transformada de Hilbert de un pulso rectangular**

Considere el pulso rectangular retardado $x(t) = A[u(t) - u(t - \tau)]$. La transformada de Hilbert es

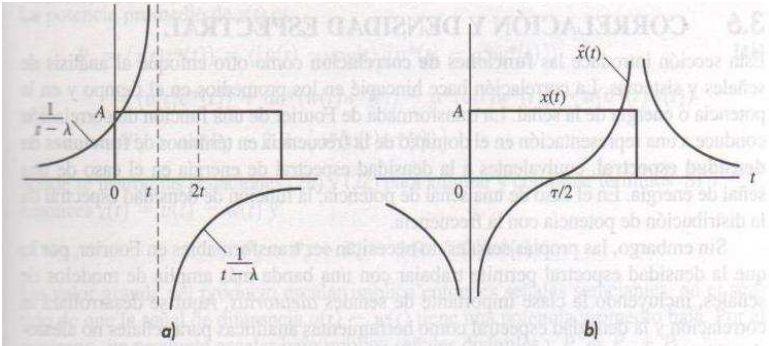


Figura 3.5-2 Transformada de Hilbert de un pulso rectangular. *a*) Convolución; *b*) resultado.

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{\tau} \frac{1}{t-\lambda}\,d\lambda$$

cuya evaluación requiere de la interpretación gráfica. La figura 3.5-2*a* muestra el caso $0 < t < \tau/2$ y se aprecia que las áreas se cancelan entre $\lambda = 0$ y $\lambda = 2t$, dejando

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_{2t}^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}[\ln(-t) - \ln(t-\tau)]$$

$$= \frac{A}{\pi}\ln\left(\frac{-t}{t-\tau}\right) = \frac{A}{\pi}\ln\left(\frac{t}{\tau-t}\right)$$

Este resultado también es válido para $\tau/2 < t < \tau$, cuando las áreas se cancelan entre $\lambda = 2t - \tau$ y $\lambda = \tau$. No hay cancelación de áreas para $t < 0$ o $t > \tau$, y

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\int_0^{\tau} \frac{d\lambda}{t-\lambda} = \frac{A}{\pi}\ln\left(\frac{t}{t-\tau}\right)$$

Estos casos separados se combinan en una sola expresión

$$\hat{x}(t) = \frac{A}{\pi}\ln\left|\frac{t}{t-\tau}\right| \qquad [4]$$

que se grafica en la figura 3.5-2*b* junto con $x(t)$.

Los picos infinitos en $\hat{x}(t)$ en $t = 0$ y $t = \tau$ se consideran una manifestación extrema de la *distorsión de retardo*. Véase la figura 3.2-5 para comparación.

EJERCICIO 3.5-1

La transformada de Hilbert inversa recupera $x(t)$ a partir de $\hat{x}(t)$. Use el análisis espectral para demostrar que $\hat{x}(t) * (-1/\pi t) = x(t)$.

3.6 CORRELACIÓN Y DENSIDAD ESPECTRAL

Esta sección introduce las **funciones de correlación** como otro enfoque al análisis de señales y sistemas. La correlación hace hincapié en los promedios en el tiempo y en la potencia o energía de la señal. La transformada de Fourier de una función de correlación conduce a una representación en el dominio de la frecuencia en términos de **funciones de densidad espectral**, equivalentes a la densidad espectral de energía en el caso de una señal de energía. En el caso de una señal de potencia, la función de densidad espectral da la distribución de potencia con la frecuencia.

Sin embargo, las propias señales no necesitan ser transformables en Fourier, por lo que la densidad espectral permite trabajar con una banda más amplia de modelos de señales, incluyendo la clase importante de señales *aleatorias*. Aquí se desarrollará la correlación y la densidad espectral como herramientas analíticas para señales no aleatorias. Usted se sentirá entonces con más confianza cuando se aborden las señales aleatorias en el capítulo 9.

Correlación de señales de potencia

Sea $v(t)$ una señal de potencia, aunque no necesariamente real ni periódica. La única condición es que debe tener una **potencia promedio** bien definida:

$$P_v \triangleq \langle |v(t)|^2 \rangle = \langle v(t)v^*(t) \rangle \geq 0 \qquad [1]$$

Aquí la operación de promediar en el tiempo se interpreta en la forma general

$$\langle z(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} z(t)\,dt$$

donde $z(t)$ es una función del tiempo arbitraria. Como referencia, observe que esta operación tiene las siguientes propiedades:

$$\langle z^*(t) \rangle = \langle z(t) \rangle^* \qquad [2a]$$

$$\langle z(t - t_d) \rangle = \langle z(t) \rangle \qquad \text{cualquier } t_d \qquad [2b]$$

$$\langle a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) \rangle = a_1\langle z_1(t) \rangle + a_2\langle z_2(t) \rangle \qquad [2c]$$

Se usarán estas propiedades con frecuencia en conjunto con la correlación.

Si $v(t)$ y $w(t)$ son señales de potencia, el promedio $\langle v(t)w^*(t) \rangle$ se denomina **producto escalar** de $v(t)$ y $w(t)$. El producto escalar es un número, posiblemente complejo, que sirve como medida de la *semejanza* entre las dos señales. La **desigualdad de Schwarz** relaciona el producto escalar con las potencias P_v y P_w, de las señales, en que

$$|\langle v(t)w^*(t) \rangle|^2 \leq P_v P_w \qquad [3]$$

Fácilmente se confirma que la igualdad se cumple cuando $v(t) = aw(t)$, donde a es una constante arbitraria. De aquí que $|\langle v(t)w^*(t) \rangle|$ es máximo cuando las señales son *proporcionales*. Pronto se definirá la correlación en función del producto escalar.

Sin embargo, primero habría que interpretar un poco más a $\langle v(t)w^*(t) \rangle$ y demostrar la desigualdad de Schwarz considerando la relación

$$z(t) = v(t) - aw(t) \qquad [4a]$$

La potencia promedio de $z(t)$ es

$$P_z = \langle z(t)z^*(t)\rangle = \langle [v(t) - aw(t)][v^*(t) - a^*w^*(t)]\rangle \quad [4b]$$
$$= \langle v(t)v^*(t)\rangle + aa^*\langle w(t)w^*(t)\rangle - a^*\langle v(t)w^*(t)\rangle - a\langle v^*(t)w(t)\rangle$$
$$= P_v + aa^*P_w - 2\,\mathrm{Re}\,[a^*\langle v(t)w^*(t)\rangle]$$

donde se usaron las ecuaciones (2*a*) y (2*c*) para ampliar y combinar términos. Si $a = 1$, entonces $z(t) = v(t) - w(t)$ y

$$P_z = P_v + P_w - 2\,\mathrm{Re}\,\langle v(t)w^*(t)\rangle$$

Un valor grande del producto escalar implica entonces señales semejantes, en el sentido de que la señal de diferencia $v(t) - w(t)$ tiene una potencia promedio baja. Por el contrario, un producto escalar bajo implica señales disímiles y $P_z \approx P_v + P_w$.

Para demostrar la desigualdad de Schwarz a partir de la ecuación (4*b*), sea $a = \langle v(t)w^*(t)\rangle/P_w$ de modo que

$$aa^*P_w = a^*\langle v(t)w^*(t)\rangle = |\langle v(t)w^*(t)\rangle|^2/P_w$$

Entonces $P_z = P_v - |\langle v(t)w^*(t)\rangle|^2/P_w \geq 0$, la cual se reduce a la ecuación (3) y completa el trabajo preliminar.

Ahora defínase la **correlación cruzada** de dos señales de potencia como†

$$R_{vw}(\tau) \triangleq \langle v(t)w^*(t-\tau)\rangle = \langle v(t+\tau)w^*(t)\rangle \quad [5]$$

Éste es un producto escalar con la segunda señal retardada por τ en relación con la primera o, equivalentemente, la primera señal avanzada por τ en relación con la segunda. El desplazamiento relativo τ es la *variable independiente* en la ecuación (5), ya que la variable t se elimina al promediar en el tiempo. Algunas propiedades generales de $R_{vw}(\tau)$ son

$$|R_{vw}(\tau)|^2 \leq P_vP_w \quad [6a]$$
$$R_{wv}(\tau) = R_{vw}^*(-\tau) \quad [6b]$$

La ecuación (6*a*) es otra forma de la desigualdad de Schwarz, mientras que la ecuación (6*b*) señala que $R_{wv}(\tau) \neq R_{vw}(\tau)$.

De las observaciones previas se concluye que $R_{vw}(\tau)$ mide la semejanza entre $v(t)$ y $w(t-\tau)$ en función de τ. La correlación cruzada es entonces una medida más sofisticada que el producto escalar ordinario ya que detecta semejanzas o diferencias desplazadas en el tiempo que se ignorarían en $\langle v(t)w^*(t)\rangle$.

Pero supóngase que una señal se correlaciona consigo misma, generando la **función de autocorrelación**

$$R_v(\tau) \triangleq R_{vv}(\tau) = \langle v(t)v^*(t-\tau)\rangle = \langle v(t+\tau)v^*(t)\rangle \quad [7]$$

Esta autocorrelación expresa algo sobre la *variación en el tiempo* de $v(t)$, por lo menos en un sentido del promedio. Si $|R_v(\tau)|$ es grande, se infiere que $v(t-\tau)$ es muy similar a $v(t)$ para ese valor particular de τ; si $|R_v(\tau)|$ es pequeña, entonces $v(t)$ y $v(t-\tau)$ deben parecer bastante diferentes.

†Otra definición usada por algunos autores es $\langle v^*(t)w(t+\tau)\rangle$, equivalente a intercambiar los subíndices de $R_{vw}(\tau)$ en la ecuación (5).

Las propiedades de la función de autocorrelación incluyen

$$R_v(0) = P_v \quad [8a]$$
$$|R_v(\tau)| \leq R_v(0) \quad [8b]$$
$$R_v(-\tau) = R_v^*(\tau) \quad [8c]$$

Se ve que $R_v(\tau)$ tiene simetría de Hermite y un valor máximo en el origen igual a la potencia de la señal. Si $v(t)$ es real, entonces $R_v(\tau)$ será real y par. Si $v(t)$ es periódica, $R_v(\tau)$ tendrá la misma periodicidad.

Por último, considérese la señal de suma o diferencia

$$z(t) = v(t) \pm w(t) \quad [9a]$$

Al formar su autocorrelación, se encuentra que

$$R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau) \pm [R_{vw}(\tau) + R_{wv}(\tau)] \quad [9b]$$

Si $v(t)$ y $w(t)$ **no están correlacionadas** para todo τ, entonces

$$R_{vw}(\tau) = R_{wv}(\tau) = 0$$

así pues, $R_z(\tau) = R_v(\tau) + R_w(\tau)$ y haciendo $\tau = 0$ se obtiene

$$P_z = P_v + P_w$$

En consecuencia, la superposición de la potencia promedio se cumple para señales no correlacionadas.

EJEMPLO 3.6-1 **Correlación de fasores y senoidales**

El cálculo de funciones de correlación para señales fasoriales y senoidales se facilita usando la ecuación (18), Sec. 2.1, escrita como

$$\langle e^{j\omega_1 t}e^{-j\omega_2 t}\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{j(\omega_1-\omega_2)t}\,dt \quad [10]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\mathrm{sinc}\,\frac{(\omega_1-\omega_2)T}{2\pi} = \begin{cases}0 & \omega_2 \neq \omega_1\\ 1 & \omega_2 = \omega_1\end{cases}$$

Este resultado se aplicará a las señales fasoriales

$$v(t) = C_ve^{j\omega_v t} \qquad w(t) = C_we^{j\omega_w t} \quad [11a]$$

donde C_v y C_w son constantes complejas que incorporan la amplitud y el ángulo de fase. La correlación cruzada es

$$R_{vw}(\tau) = \langle [C_ve^{j\omega_v t}][C_we^{j\omega_w(t-\tau)}]^*\rangle$$
$$= C_vC_w^*e^{j\omega_w\tau}\langle e^{j\omega_v t}e^{-j\omega_w t}\rangle$$

$$= \begin{cases} 0 & \omega_w \neq \omega_v \\ C_v C_w^* e^{j\omega_v \tau} & \omega_w = \omega_v \end{cases} \quad [11b]$$

Por ende, los fasores no están correlacionados, a menos que tengan frecuencias idénticas. La función de autocorrelación es

$$R_v(\tau) = |C_v|^2 e^{j\omega_v \tau} \quad [11c]$$

la cual sale de la ecuación (11*b*) cuando $w(t) = v(t)$.

Ahora es una tarea sencilla demostrar que la señal senoidal

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad [12a]$$

tiene

$$R_z(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau \quad [12b]$$

Claramente, $R_z(\tau)$ es real, par y periódica y tiene el valor máximo $R_z(0) = A^2/2 = P_z$. Este máximo también ocurre siempre que $\omega_0 \tau$ sea igual a un múltiplo de 2π radianes, de modo que $z(t \pm \tau) = z(t)$. Por otra parte, $R_z(\tau) = 0$ cuando $z(t \pm \tau)$ y $z(t)$ están en cuadratura de fase.

Pero obsérvese que el ángulo de fase ϕ no aparece en $R_z(\tau)$, debido al efecto promediador de la correlación. Esto subraya el hecho de que la función de autocorrelación no define una señal en forma única.

EJERCICIO 3.6-1

Deducir la ecuación (12*b*) escribiendo $z(t)$ como una suma de fasores conjugados y aplicando las ecuaciones (9) y (11).

Correlación de señales de energía

El promediar productos de señales de energía para todo el tiempo da cero. Pero tiene sentido hablar de la **energía total**

$$E_v \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) v^*(t)\, dt \geq 0 \quad [13]$$

En forma análoga, las funciones de correlación para señales de energía se definen como

$$R_{vw}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} v(t) w^*(t - \tau)\, dt \quad [14a]$$

$$R_v(\tau) \triangleq R_{vv}(\tau) \quad [14b]$$

Puesto que la operación de integración $\int_{-\infty}^{\infty} z(t)\, dt$ tiene las mismas propiedades matemáticas que la operación de promediar en el tiempo $\langle z(t) \rangle$, todas las relaciones de

correlación previas son válidas para el caso de señales de energía si se remplaza la potencia promedio P_v por la energía total E_v. Así, se tiene la propiedad

$$|R_{vw}(\tau)|^2 \leq E_v E_w \quad [15]$$

como la versión para señales de energía de la ecuación (6*a*).

Un examen más cuidadoso de la ecuación (14) revela que la correlación de señales de energía es un tipo de *convolución*, ya que con $z(t) = w^*(-t)$ y $t = \lambda$, el lado derecho de la ecuación (14*a*) se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda) z(\tau - \lambda)\, d\lambda = v(\tau) * z(\tau)$$

y, por tanto,

$$R_{vw}(\tau) = v(\tau) * w^*(-\tau) \quad [16]$$

De la misma forma, $R_v(\tau) = v(\tau) * v^*(-\tau)$.

Se obtienen algunas relaciones adicionales en función de las transformadas de Fourier $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$, etc. Específicamente, de las ecuaciones (16) y (17), Sec. 2.2,

$$R_v(0) = E_v = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df$$

$$R_{vw}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) w^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f)\, df$$

Combinando estas integrales con $|R_{vw}(0)|^2 \leq E_v E_w = R_v(0) R_w(0)$ da

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} V(f) W^*(f)\, df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2\, df \int_{-\infty}^{\infty} |W(f)|^2\, df \quad [17]$$

La ecuación (17) es una expresión en el dominio de la frecuencia de la desigualdad de Schwarz. La igualdad se cumple cuando $V(f)$ y $W(f)$ son proporcionales.

EJEMPLO 3.6-2 **Reconocimiento de patrones**

La correlación cruzada se usa en tareas de reconocimiento de patrones. Si la correlación cruzada de los objetos A y B es similar a la autocorrelación de A, entonces se supone que B se adapta a A. De otra forma, B no se adapta a A. Por ejemplo, la autocorrelación de $x(t) = \Pi(t)$ se determina calculando la correlación gráfica en la ecuación (14*b*) como $R_x(\tau) = \Lambda(\tau)$. Si se examina la semejanza de $y(t) = 2\Pi(t)$ con $x(t)$ hallando la correlación cruzada $R_{xy}(\tau) = 2\Lambda(\tau)$, se ve que $R_{xy}(\tau)$ es sólo una versión escalada de $R_x(\tau)$. Por tanto, $y(t)$ se adapta a $x(t)$. No obstante, si se toma la correlación cruzada de $z(t) = u(t)$ con $x(t)$, se obtiene

$$R_{xz}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{para } \tau < -1/2 \\ 1/2 - \tau & \text{para } -1/2 \leq \tau \leq 1/2 \\ 0 & \text{para } \tau > 1/2 \end{cases}$$

y se concluye que $z(t)$ no se adapta a $x(t)$.

Este tipo de correlación gráfica es particularmente efectivo para señales que no tienen una solución en forma cerrada. Por ejemplo, la autocorrelación determina el tono (frecuencia fundamental) de señales de audio. La correlación cruzada determina por su parte si dos muestras de voz tienen el mismo tono y por ello si pueden provenir del mismo individuo.

EJERCICIO 3.6-2

Sea $v(t) = A[u(t) - u(t - D)]$ y $w(t) = v(t - t_d)$. Usar la ecuación (16) con $z(\tau) = v^*(-\tau)$ para dibujar $R_{vw}(\tau)$. Confirmar en su dibujo que $|R_{vw}(\tau)|^2 \leq E_v E_w$ y que $|R_{vw}(\tau)|^2_{máx} = E_v E_w$ en $\tau = -t_d$.

A continuación se investigará el análisis de sistemas en el "dominio de τ", como se representa en la figura 3.6-1. Una señal $x(t)$ con autocorrelación $R_x(\tau)$ se aplica a un sistema LIT con respuesta al impulso $h(t)$, produciendo la señal de salida

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, x(t - \lambda)\, d\lambda$$

Se demostrará que la función de correlación cruzada de entrada-salida es

$$R_{yx}(\tau) = h(\tau) * R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\, R_x(\tau - \lambda)\, d\lambda \qquad [18]$$

y que la función de autocorrelación de salida es

$$R_y(\tau) = h^*(-\tau) * R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(-\mu) R_{yx}(\tau - \mu)\, d\mu \qquad [19a]$$

Sustituyendo la ecuación (18) en la ecuación (19a) da entonces

$$R_y(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau) \qquad [19b]$$

Obsérvese que estas relaciones en el dominio de τ son convoluciones, semejantes a la relación en el dominio del tiempo.

Para su deducción, supóngase que $x(t)$ y $y(t)$ son señales de potencia de modo que pueda usarse la notación compacta para el promedio en el tiempo. Evidentemente, los mismos resultados se cumplirán cuando $x(t)$ y $y(t)$ sean señales de energía. La suposición de un sistema estable asegura que $y(t)$ será el mismo tipo de señal que $x(t)$.

Comenzando con la correlación cruzada $R_{yx}(\tau) = \langle y(t)x^*(t - \tau)\rangle$, se inserta la integral de superposición $h(t)x^*(t)$ para $y(t)$ y se intercambia el orden de las operaciones para obtener

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)\langle x(t - \lambda)x^*(t - \tau)\rangle\, d\lambda$$

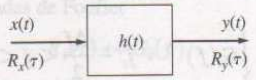


Figura 3.6-1

Pero como $\langle z(t)\rangle = \langle z(t + \lambda)\rangle$ para cualquier λ,

$$\begin{aligned}\langle x(t - \lambda)x^*(t - \tau)\rangle &= \langle x(t + \lambda - \lambda)x^*(t + \lambda - \tau)\rangle \\ &= \langle x(t)x^*[t - (\tau - \lambda)]\rangle \\ &= R_x(\tau - \lambda)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) R_x(\tau - \lambda)\, d\lambda$$

Procediendo de la misma forma para $R_y(\tau) = \langle y(t)y^*(t - \tau)\rangle$ se obtiene

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(\lambda)\langle y(t)x^*(t - \tau - \lambda)\rangle d\lambda$$

en la cual $\langle y(t)x^*(t - \tau - \lambda)\rangle = R_{yx}(\tau + \lambda)$. La ecuación (19$a$) se deduce del cambio de variable $\mu = -\lambda$.

Funciones de densidad espectral

Ahora se cuenta ya con los elementos para discutir las funciones de densidad espectral. Dada una señal de potencia o de energía $v(t)$, su función de densidad espectral $G_v(f)$ representa la distribución de potencia o de energía en el dominio de la frecuencia y tiene dos propiedades esenciales. Primera, el área bajo $G_v(f)$ es igual a la potencia promedio o a la energía total, esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)\, df = R_v(0) \qquad [20]$$

Segunda, si $x(t)$ es la entrada a un sistema LIT con $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$, entonces las funciones de densidad espectral de entrada y de salida están relacionadas por

$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f) \qquad [21]$$

ya que $|H(f)|^2$ es la ganancia de potencia o energía en cualquier f. Estas dos propiedades se combinan en

$$R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 G_x(f)\, df \qquad [22]$$

la cual expresa la potencia o la energía de salida $R_y(0)$ en función de la densidad espectral de la entrada.

La ecuación (22) conduce a una interpretación física de la densidad espectral con la ayuda de la figura 3.6-2. Aquí, $G_x(f)$ es arbitraria y $|H(f)|^2$ actúa como un filtro de banda angosta de ganancia unitaria, de modo que

$$G_y(f) = \begin{cases} G_x(f) & f_c - \dfrac{\Delta f}{2} < f < f_c + \dfrac{\Delta f}{2} \\ 0 & \text{otros valores de } f \end{cases}$$

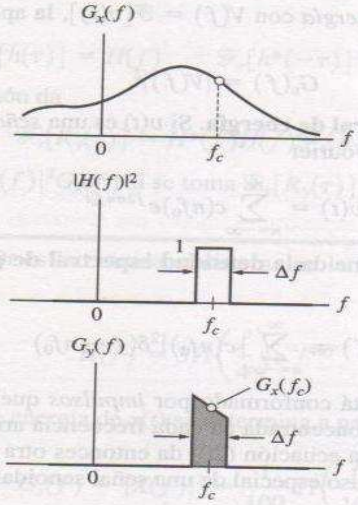


Figura 3.6-2 Interpretación de las funciones de densidad espectral.

Si Δf es lo suficientemente pequeño, el área bajo $G_y(f)$ será $R_y(0) \approx G_x(f_c)\Delta f$ y

$$G_x(f_c) \approx R_y(0)/\Delta f$$

Se concluye que en cualquier frecuencia $f = f_c$, $G_x(f_c)$ es igual a la *potencia o energía por unidad de frecuencia* de la señal. Se concluye también que cualquier función de densidad espectral debe *ser real* y *no negativa* para todos los valores de f.

Pero ¿cómo se determina $G_v(f)$ a partir de $v(t)$? El *teorema de Wiener-Kinchine* expresa que primero se calcula la función de autocorrelación y luego se toma su transformada de Fourier, esto es,

$$G_v(f) = \mathcal{F}_\tau[R_v(\tau)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau \qquad \textbf{[23a]}$$

donde $\mathcal{F}_\tau$ representa la operación de la transformada de Fourier con τ en lugar de t. La transformada inversa es

$$R_v(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}[G_v(f)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} G_v(f)e^{j2\pi f\tau}\,df \qquad \textbf{[23b]}$$

y se tiene el par de transformadas de Fourier

$$R_v(\tau) \leftrightarrow G_v(f)$$

Por tanto, todos los teoremas de transformadas anteriores pueden emplearse para desarrollar relaciones entre la autocorrelación y la densidad espectral.

Si $v(t)$ es una señal de *energía* con $V(f) = \mathcal{F}[v(t)]$, la aplicación de las ecuaciones (16) y (23*a*) muestra que

$$G_v(f) = |V(f)|^2 \qquad \textbf{[24]}$$

y se tiene la **densidad espectral de energía**. Si $v(t)$ es una *señal de potencia periódica* con la expansión en serie de Fourier

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nf_0)e^{j2\pi nf_0t} \qquad \textbf{[25a]}$$

el teorema de Wiener-Kinchine da la **densidad espectral de potencia**, o **espectro de potencia**, como

$$G_v(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c(nf_0)|^2\delta(f - nf_0) \qquad \textbf{[25b]}$$

Este espectro de potencia está conformado por *impulsos* que representan la potencia fasorial promedio $|c(nf_0)|^2$ concentrada en cada frecuencia armónica $f = nf_0$. Sustituyendo la ecuación (25*b*) en la ecuación (20) da entonces otra forma del teorema de la potencia de Parseval. En el caso especial de una señal senoidal

$$z(t) = A\cos(\omega_0t + \phi)$$

se usa $R_z(\tau)$ de la ecuación (12*b*) para obtener

$$G_v(f) = \mathcal{F}_\tau[(A^2/2)\cos 2\pi f_0\tau]$$
$$= \frac{A^2}{4}\delta(f - f_0) + \frac{A^2}{4}\delta(f + f_0)$$

la cual se grafica en la figura 3.6-3.

Todos los casos anteriores sirven de soporte al teorema de Wiener-Kinchine, pero no constituyen una demostración general. Para demostrar el teorema, debe confirmarse que el cálculo de $G_v(f) = \mathcal{F}_\tau[R_v(\tau)]$ satisface las propiedades en las ecuaciones (20) y (21). La primera se deduce de inmediato a partir de la transformada inversa en la ecuación (23*b*) con $\tau = 0$. Recuérdese ahora que la expresión para la autocorrelación de salida es

$$R_y(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau) * R_x(\tau)$$

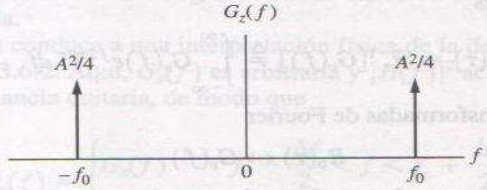


Figura 3.6-3 Espectro de potencia de $z(t) = A\cos(\omega_0t + \phi)$.

Puesto que

$$\mathcal{F}_\tau[h(\tau)] = H(f) \qquad \mathcal{F}_\tau[h^*(-\tau)] = H^*(f)$$

el teorema de convolución da

$$\mathcal{F}_\tau[R_y(\tau)] = H^*(f)H(f)\mathcal{F}_\tau[R_x(\tau)]$$

y entonces $G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$ si se toma $\mathcal{F}_\tau[R_y(\tau)] = G_y(f)$, etcétera.

EJEMPLO 3.6-3

La señal $x(t) = \text{sinc } 10t$ es la entrada al sistema en la figura 3.6-1, cuya función de transferencia es

$$H(f) = 3\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j4\pi f}$$

La densidad espectral de energía de $x(t)$ se determina a partir de la ecuación (24)

$$G_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)$$

y la correspondiente densidad espectral de la salida $y(t)$

$$\begin{aligned} G_y(f) &= |H(f)|^2 G_x(f) \\ &= \left[9\Pi\left(\frac{f}{4}\right)\right]\left[\frac{1}{100}\Pi\left(\frac{f}{10}\right)\right] \\ &= \frac{9}{100}\Pi\left(\frac{f}{4}\right) \end{aligned}$$

ya que las amplitudes se multiplican sólo en la región donde las funciones se traslapan. Hay varias formas de determinar las energías totales E_x y E_y. Se sabe que

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df$$

$$= \int_{-5}^{5} \frac{1}{100}\,df = \frac{1}{10}$$

Se determina $R_x(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}\{G_x(f)\} = \frac{1}{10}\,\text{sinc } 10t$ a partir de la cual $E_x = R_x(0) = \frac{1}{10}$. De forma semejante,

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2\,df = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f)\,df$$

$$= \int_{-2}^{2} \frac{9}{100}\,df = \frac{9}{25}$$

Y correspondientemente $R_y(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}\{G_y(f)\} = \frac{9}{25}\,\text{sinc } 4t$, la cual conduce al mismo resultado que $E_y = R_y(0) = \frac{9}{25}$. La señal de salida $y(t)$ se determina directamente a partir de la relación

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{3}{10}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)e^{-j4\pi f}$$

haciendo el mismo tipo de multiplicación entre funciones rectangulares como ya se hizo antes para la densidad espectral. Usando los teoremas de la transformada de Fourier, $y(t) = \frac{6}{5}\,\text{sinc } 4(t-2)$.

EJEMPLO 3.6-4 **Filtro de característica en peine *(comb)***

Considérese el **filtro de característica en peine** en la figura 3.6-4*a*. La respuesta al impulso es

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t - T)$$

de modo que

$$H(f) = 1 - e^{-j2\pi fT}$$

y

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= 2 - e^{-j2\pi fT} - e^{j2\pi fT} \\ &= 4\,\text{sen}^2\,2\pi(f/f_c) \qquad f_c = 2/T \end{aligned}$$

El gráfico de $|H(f)|^2$ de la figura 3.6-4*b* explica el nombre de este filtro.

Si se conoce la densidad espectral de la entrada, entonces la densidad de la salida y la autocorrelación se determinan a partir de

$$G_y(f) = 4\,\text{sen}^2\,2\pi(f/f_c)G_x(f)$$

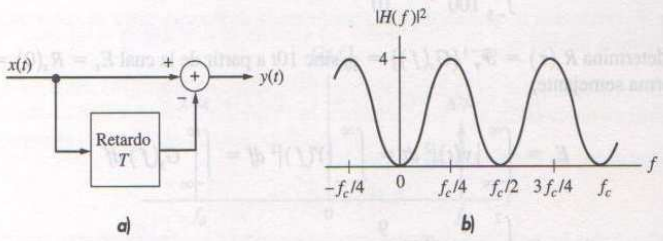


Figura 3.6-4 Filtro de característica en peine.

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}[G_y(f)]$$

Si también se conoce la autocorrelación de la entrada, se escribe

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}_\tau^{-1}[|H(f)|^2] * R_x(f)$$

donde, al usar la expresión exponencial para $|H(f)|^2$, se obtiene

$$\mathcal{F}_\tau^{-1}[|H(f)|^2] = 2\delta(\tau) - \delta(\tau - T) - \delta(\tau + T)$$

Por tanto,

$$R_y(\tau) = 2R_x(\tau) - R_x(\tau - T) - R_x(\tau + T)$$

y la potencia o la energía de salida es $R_y(0) = 2R_x(0) - R_x(-T) - R_x(T)$.

EJERCICIO 3.6-3

Sea $v(t)$ una señal de energía. Demuestre que $\mathcal{F}_\tau[v^*(-\tau)] = V^*(f)$. Luego deduzca la relación $G_v(f) = |V(f)|^2$ aplicando la ecuación (23*a*) a la ecuación (16).

3.7 PROBLEMAS

3.1-1 Un sistema dado tiene una respuesta al impulso $h(t)$ y función de transferencia $H(f)$. Obténganse las expresiones para $y(t)$ y $Y(f)$ cuando $x(t) = A[\delta(t + t_d) - \delta(t - t_d)]$.

3.1-2 Repítase el problema 3.1-1 con $x(t) = A[\delta(t + t_d) + \delta(t)]$.

3.1-3* Repítase el problema 3.1-1 con $x(t) = Ah(t - t_d)$.

3.1-4 Repítase el problema 3.1-1 con $x(t) = Au(t - t_d)$.

3.1-5 Justifíquese la ecuación (7*b*) a partir de la ecuación (14) con $x(t) = u(t)$.

3.1-6 Determínese y grafíquese $|H(f)|$ y arg $H(f)$ para un sistema descrito por la ecuación diferencial $dy(t)/dt + 4\pi y(t) = dx(t)/dt + 16\pi x(t)$.

3.1-7 Repítase el problema 3.1-6 con $dy(t)/dt + 16\pi y(t) = dx(t)/dt + 4\pi x(t)$.

3.1-8 Repítase el problema 3.1-6 con $dy(t)/dt - 4\pi y(t) = -dx(t)/dt + 4\pi x(t)$.

3.1-9* Usar el análisis en el dominio de la frecuencia para obtener una expresión aproximada para $y(t)$ cuando $H(f) = B/(B + jf)$ y $x(t)$ es tal que $X(f) \approx 0$ para $|f| < W$ con $W \gg B$.

3.1-10 Usar el análisis en el dominio de la frecuencia para obtener una expresión aproximada para $y(t)$ cuando $H(f) = jf/(B + jf)$ y $x(t)$ es tal que $X(f) \approx 0$ para $|f| > W$ con $W \ll B$.

3.1-11 La entrada a un filtro pasabajas RC es $x(t) = 2$ sinc $4Wt$. Graficar la razón de energía E_y/E_x versus B/W.

3.1-12 Grafíquese e identifíquese la respuesta al impulso del sistema en cascada en la figura 3.1-8*b* cuando los bloques representan retenedores de orden cero con retardos de tiempo $T_1 > T_2$.

3.1-13 Dibújese e identifíquese la respuesta al impulso del sistema en cascada en la figura 3.1-8*b* cuando $H_1(f) = [1 + j(f/B)]^{-1}$ y el segundo bloque representa un retenedor de orden cero con retardo de tiempo $T \gg 1/B$.

3.1-14* Determinar la respuesta al impulso y al escalón del sistema realimentado en la figura 3.1-8*c* cuando $H_1(f)$ es un diferenciador y $H_2(f)$ es una ganancia K.

3.1-15 Determinar la respuesta al impulso y al escalón del sistema realimentado en la figura 3.1-8*c* cuando $H_1(f)$ es una ganancia K y $H_2(f)$ es un diferenciador.

3.1-16‡ Si $H(f)$ es la función de transferencia de un sistema físicamente realizable, entonces $h(t)$ debe ser real y causal. Como consecuencia, para $t \geq 0$ demostrar que

$$h(t) = 4\int_0^\infty H_r(f)\cos \omega t\, df = 4\int_0^\infty H_i(f)\cos \omega t\, df$$

donde $H_r(f) = \text{Re}[H(f)]$ y $H_i(f) = \text{Im}[H(f)]$.

3.2-1 Demuéstrese que un sistema de pasabajas de primer orden produce esencialmente transmisión sin distorsión si $x(t)$ está limitada en banda a $W \ll B$.

3.2-2 Determinar y graficar $y(t)$ cuando la señal de prueba $x(t) = 4\cos \omega_0 t + \frac{4}{9}\cos 3\omega_0 t + \frac{4}{25}\cos 5\omega_0 t$, la cual se aproxima a una onda triangular, se aplica a un sistema de pasabajas de primer orden con $B = 3f_0$.

3.2-3* Determínese y grafíquese $y(t)$ cuando la señal de prueba del problema 3.2-2 se aplica a un sistema de pasaaltas de primer orden con $H(f) = jf/(B + jf)$ y $B = 3f_0$.

3.2-4 Se va a transmitir la señal 2 sinc $40t$ por un canal con función de transferencia $H(f)$. La salida es $y(t) = 20$ sinc $(40t - 200)$. Determinar $H(f)$ y graficar su magnitud y fase para $|f| \leq 30$.

3.2-5 Evalúese $t_d(f)$ en $f = 0, 0.5, 1$ y 2 kHz para un sistema pasabajas de primer orden con $B = 2$ kHz.

3.2-6 Un canal tiene la función de transferencia

$$H(f) = \begin{cases} 4\Pi\left(\dfrac{f}{40}\right)e^{-j\pi f/30} & \text{para } |f| \leq 15 \text{ Hz} \\ 4\Pi\left(\dfrac{f}{40}\right)e^{-j\pi/2} & \text{para } |f| > 15 \text{ Hz} \end{cases}$$

Graficar el retardo de fase $t_d(f)$ y el retardo de grupo $t_g(f)$. ¿Para qué valores de f se tiene $t_d(f) = t_g(f)$?

3.2-7 Considérese un canal de transmisión con $H_C(f) = (1 + 2\alpha\cos \omega T)e^{-j\omega T}$, la cual tiene *rizos de amplitud*. (*a*) Demuéstrese que $y(t) = \alpha x(t) + x(t - T) + \alpha x(t - 2T)$, de modo que la salida incluya un eco delantero y otro trasero. (*b*) Sea $x(t) = \Pi(t/\tau)$ y $\alpha = 1/2$. Grafíquese $y(t)$ para $\tau = 2T/3$ y $4T/3$.

3.2-8* Considerar un canal de transmisión con $H_C(f) = \exp[-j(\omega T - \alpha \text{ sen } \omega T)]$, el cual tiene *rizos de fase*. Suponga que $|\alpha| \ll \pi/2$ y usar una expansión en serie para demostrar que la salida incluye un eco delantero y otro trasero.

3.2-9 Diseñar un compensador de línea de retardo con terminales para la $H_c(f)$ en el problema 3.2-8 con $\alpha = 0.4$.

3.2-10 Diseñar un compensador de línea de retardo con terminales para la $H_c(f)$ en el problema 3.2-7 con $\alpha = 0.4$.

3.2-11 Supóngase que se aplica $x(t) = A \cos \omega_0 t$ a un sistema no lineal con $y(t) = 2x(t) - 3x^3(t)$. Escriba $y(t)$ como una suma de cosenos. Después evalúese la distorsión de la segunda y la tercera armónicas cuando $A = 1$ y $A = 2$.

3.2-12 Repetir el problema 3.2-11 con $y(t) = 5x(t) - 2x^2(t) + 4x^3(t)$.

3.3-1* Supóngase que la repetidora en la figura 3.3-2 tiene $P_{in} = 0.5$ W, $\alpha = 2$ dB/km y una longitud de trayectoria total igual a 50 km. Determínense las ganancias de los amplificadores y la colocación de la repetidora para que $P_{out} = 50$ mW y la potencia de la señal en la entrada de cada amplificador sea igual a 20μW.

3.3-2 Repítase el problema 3.3-1 con $P_{in} = 100$ mW y $P_{out} = 0.1$ W.

3.3-3 Un sistema repetidor de 400 km está formado por m secciones idénticas de cable con $\alpha = 0.4$ dB/km y m amplificadores idénticos con una ganancia máxima de 30 dB. Determínese el número de secciones requeridas y la ganancia por amplificador de modo que $P_{out} = 50$ mW cuando $P_{in} = 2$W.

3.3-4 Un sistema repetidor de 3 000 km está formado por m secciones idénticas de cable de fibra óptica con $\alpha = 0.5$ dB/km y m amplificadores idénticos. Determinar el número requerido de secciones y la ganancia por amplificador de modo que $P_{out} = P_{in} = 5$ mW y la potencia de entrada a cada amplificador sea de al menos 67 μW.

3.3-5 Repítase el problema 3.3-4 con $\alpha = 2.5$ dB/km.

3.3-6* Supóngase que el enlace de radio en la figura 3.3-4 tiene $f = 3$ GHz, $\ell = 40$ km y $P_{in} = 5$W. Si ambas antenas son platos circulares con el mismo radio r, determínese el valor de r que producen $P_{out} = 2\ \mu$W.

3.3-7 Repetir el problema 3.3-6 con $f = 200$ MHz y $\ell = 10$ km.

3.3-8 El enlace de radio en la figura 3.3-4 se usa para transmitir una señal de TV metropolitana a una compañía rural de cable a 50 km de distancia. Suponga que una repetidora de radio con una ganancia total g_{rpt} (incluyendo las antenas y el amplificador) se inserta enmedio de la trayectoria. Obténgase la condición del valor de g_{rpt} para que P_{out} se incremente en 20 por ciento.

3.3-9 Un satélite de transmisión directa (DBS = direct broadcast satellite) usa 17 GHz para el enlace ascendente y 12 GHz para el descendente. Usando los valores de los amplificadores en el ejemplo 3.3-1, determinar P_{out} suponiendo que $P_{in} = 30$ dBW.

3.4-1 Determínese y grafíquese la respuesta al impulso del HPF ideal definido por la ecuación (1) con $f_u = \infty$.

3.4-2* Determínese y grafíquese la respuesta al impulso de un filtro de rechazo de banda ideal con $H(f) = 0$ para $f_c - B/2 < |f| < f_c + B/2$ y transmisión sin distorsión para las demás frecuencias.

3.4-3 Determinar el valor mínimo de n para que un filtro de Butterworth tenga $|H(f)| \geq -1$ dB para $|f| < 0.7B$. Luego calcular $|H(3B)|$ en dB.

3.4-4 Determinar el valor mínimo de n para que un filtro de Butterworth tenga $|H(f)| \geq -1$ dB para $|f| < 0.9B$. Después calcular $|H(3B)|$ en dB.

3.4-5 La respuesta al impulso de un LPF de Butterworth de segundo orden es $h(t) = 2be^{-bt} \sin bt\, u(t)$ con $b = 2\pi B/\sqrt{2}$. Dedúzcase este resultado usando una tabla de transformadas de Laplace tomando $p = s/2\pi B$ en la tabla 3.4-1.

3.4-6 Sea $R = \sqrt{L/C}$ en la figura 3.4-7. *a*) Demuéstrese que $|H(f)|^2 = [1 - (f/f_0)^2 + (f/f_0)^4]^{-1}$ con $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$. *b*) Determínese el ancho de banda a 3 dB en función de f_0, luego grafique $|H(f)|$ y compárese el resultado con la respuesta de un Butterworth de segundo orden.

3.4-7 Demostrar que el tiempo de subida de 10-90% de un LPF de primer orden es igual a $1/2.87B$.

3.4-8* Usar la $h(t)$ dada en el problema 3.4-5 para determinar la respuesta al escalón de un LPF Butterworth de segundo orden. Entonces graficar $g(t)$ y estimar el tiempo de subida en función de B.

3.4-9 Supóngase que la señal $x(t) = A$ sinc $4Wt$ se aplica a un LPF ideal con ancho de banda B. Tomando la duración de at como $\tau = 2/a$, grafíquese la razón de la duración del pulso de salida y de entrada en función de B/W.

3.4-10‡ El **ancho de banda efectivo** de un LPF y la **duración efectiva** de su respuesta al impulso se definen como

$$B_{ef} \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|\, df}{2H(0)} \qquad \tau_{ef} \triangleq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, dt}{|h(t)|_{máx}}$$

Obténganse las expresiones para $H(0)$ y $|h(t)|$ a partir de $\mathcal{F}[h(t)]$ y $\mathcal{F}^{-1}[H(f)]$, respectivamente. Después demuéstrese que $\tau_{ef} \geq 1/2\ B_{ef}$.

3.4-11‡ Supóngase que la respuesta al impulso de un LPF ideal es truncada para obtener la función causal

$$h(t) = 2KB \text{ sinc } 2B(t - t_d) \qquad 0 < t < 2t_d$$

y $h(t) = 0$ para otros valores de t. *a*) Mediante la transformación de Fourier demuéstrese que

$$H(f) = \frac{K}{\pi} e^{-j\omega t_d} \{\text{Si}\,[2\pi(f + B)t_d] - \text{Si}\,[2\pi(f - B)t_d]\}$$

b) Grafíquese $h(t)$ y $|H(f)|$ para $t_d \gg 1/B$ y $t_d = 1/2B$.

3.5-1 Sea $x(t) = \delta(t)$. (*a*) Determinar $\hat{x}(t)$ a partir de la ecuación (2) y usar el resultado para confirmar que $\mathcal{F}^{-1}[-j \text{ sgn } f] = 1/\pi t$. *b*) Deducir entonces otro par de transformadas de Hilbert a partir de la propiedad $\hat{x}(t)*(-1/\pi t) = x(t)$.

3.5-2* Usar la ecuación (3), Sec. 3.1 y el resultado en el ejemplo 3.5-2 para obtener la transformada de Hilbert de $A\Pi(t/\tau)$. Ahora demostrar que si $v(t) = A$ para todo el tiempo, entonces $\hat{v}(t) = 0$.

3.5-3 Usar la ecuación (3) para demostrar que si $x(t) = \text{sinc } 2Wt$, entonces $\hat{x}(t) = \pi Wt \text{ sinc}^2 Wt$.

3.5-4 Determinar la transformada de Hilbert de la señal en la figura 3.2-3 usando los resultados del ejemplo 3.5-1.

3.5-5* Determinar la transformada de Hilbert de la señal

$$x(t) = 4\cos\omega_0 t + \tfrac{4}{9}\cos 3\omega_0 t + \tfrac{4}{25}\cos 5\omega_0 t.$$

3.5-6 Demuéstrese que las funciones que forman el par de transformadas de Hilbert en el problema 3.5-3 tienen el mismo espectro de amplitudes al determinar la magnitud de la transformada de Fourier de cada una. (*Sugerencia:* el término sinc^2 como el producto de una función seno y una función sinc.)

3.5-7 Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t)dt = 0$ para $x(t) = A\cos\omega_0 t$.

3.5-8‡ Supóngase que la función de transferencia de un filtro se escribe en la forma $H(f) = H_e(f) + jH_o(f)$, como en la ecuación (10), Sec. 2.2. Si el filtro es físicamente realizable, entonces su respuesta al impulso debe tener la propiedad causal $h(t) = 0$ para $t < 0$. Por tanto, se escribe $h(t) = (1 + \text{sgn } t)h_e(t)$, donde $h_e(t) = \frac{1}{2}h(|t|)$ para $-\infty < t < \infty$. Demuéstrese que $\mathcal{F}[h_e(t)] = H_e(f)$ y que, por tanto, la causalidad requiere que $H_o(f) = -\hat{H}_e(f)$.

3.6-1 Demostrar la ecuación (6*b*).

3.6-2 Supóngase que $v(t)$ es periódica con periodo T_0. Usando la ecuación (7), demuéstrese que $R_v(\tau)$ tiene la misma periodicidad.

3.6-3 Dedúzcase la ecuación (8*b*) tomando $w(t) = v(t - \tau)$ en la ecuación (3).

3.6-4 Usar el método de reconocimiento de patrones demostrado en el ejemplo 3.6-2 para determinar si $y(t) = \text{sen } 2\omega_0 t$ es semejante a $x(t) = \cos 2\omega_0 t$.

3.6-5* Usar la ecuación (24) para obtener la densidad espectral, la autocorrelación y la energía de la señal cuando $v(t) = A\Pi[(t - t_d)/D]$.

3.6-6 Repítase el problema 3.6-5 con $v(t) = A\,\text{sinc}\,4W(t + t_d)$.

3.6-7 Repítase el problema 3.6-5 con $v(t) = Ae^{-bt}u(t)$.

3.6-8 Usar la ecuación (25) para obtener la densidad espectral, la autocorrelación y la potencia de la señal cuando $v(t) = A_0 + A_1 \text{ sen } (\omega_0 t + \phi)$.

3.6-9 Repítase el problema 3.6-8 con $v(t) = A_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) + A_2 \text{ sen } (2\omega_0 t + \phi_1)$.

3.6-10* Obténgase la autocorrelación de $v(t) = Au(t)$ a partir de la ecuación (7). Úsese el resultado para determinar la potencia de la señal y la densidad espectral.

3.6-11 La señal de energía $x(t) = \Pi(10t)$ es la entrada a un sistema de un filtro pasabajas ideal con $K = 3$, $B = 20$ y $t_d = 0.05$, produciendo la señal de salida $y(t)$. Escríbase y simplifíquese una expresión para $R_y(\tau)$.

capítulo

4

Modulación lineal de OC

RESUMEN DEL CAPÍTULO

4.1 **Señales y sistemas pasabanda**
Convenciones para los mensajes analógicos Señales pasabanda Transmisión para los pasabanda

4.2 **Modulación de amplitud de doble banda lateral**
Señales y espectros de AM Señales y espectros de DSB Modulación de tono y análisis fasorial

4.3 **Moduladores y transmisores**
Moduladores de producto Moduladores de ley cuadrática y balanceados Moduladores de conmutación

4.4 **Modulación de amplitud con banda lateral suprimida**
Señales y espectros de SSB Generación de SSB Señales y espectros de VSB★

4.5 **Conversión de frecuencia y demodulación**
Conversión de frecuencia Detección síncrona Detección de envolvente

En el capítulo 1 se mencionaron los diferentes propósitos de la modulación junto con una descripción cualitativa del proceso. Recapitulando brevemente: la *modulación* es la alteración sistemática de una forma de onda, llamada *portadora*, de acuerdo con las características de otra forma de onda, que es la señal moduladora o mensaje. El objetivo fundamental es producir una onda modulada portadora de información cuyas propiedades están mejor adaptadas a la tarea comunicacional dada.

Ahora emprenderemos un recorrido por los **sistemas de modulación de onda continua** (OC). En estos sistemas, la portadora es una onda senoidal modulada por una señal analógica; la radio AM y la FM son ejemplos conocidos. La abreviatura OC también se refiere a la conmutación de enciende y apaga de una senoide, como en la radiotelegrafía, aunque a ese proceso se le conoce más propiamente como *onda continua interrumpida* (OCI).

En este capítulo se abordará específicamente la modulación **lineal** de OC, la cual comprende la traslación directa de las frecuencias del espectro del mensaje. La modulación de doble banda lateral (DBS) es precisamente eso. Pequeñas modificaciones del espectro trasladado producen modulación de amplitud convencional (AM), modulación de banda lateral única (SSB) o bien modulación de banda lateral residual (VSB). Cada una de estas variaciones tiene sus propias ventajas distintivas y aplicaciones prácticas significativas. A cada una se le dará su debida consideración, incluidos algunos temas, como las formas de ondas y los espectros, los métodos de modulación, los transmisores y la demodulación. El capítulo comienza con una discusión general de señales y sistemas pasabanda, relacionados con todas las formas de modulación de OC.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, usted será capaz de hacer lo siguiente:

1. Dada una señal pasabanda, determinar su envolvente y su fase, sus componentes en fase y en cuadratura, así como la señal equivalente pasabajas y el espectro (Sec. 4.1).
2. Expresar y aplicar la regla empírica del ancho de banda fraccionario para sistemas pasabanda (Sec. 4.1).
3. Graficar la forma de onda y la envolvente de una señal AM o DSB, e identificar las propiedades espectrales de AM, DSB, SSB y VSB (Secs. 4.2 y 4.4).
4. Construir el espectro de líneas y el diagrama fasorial y determinar la potencia en las bandas laterales y la potencia total de una señal AM, DSB, SSB o VSB con modulación de tono (Secs. 4.2 y 4.4).
5. Diferenciar entre moduladores de producto, de ley de potencias y balanceados, y analizar un sistema de modulación (Sec. 4.3).
6. Identificar las características de la detección síncrona, homodina y de envolvente (Sec. 4.5).

4.1 SEÑALES Y SISTEMAS PASABANDA

La comunicación efectiva a grandes distancias requiere normalmente de una portadora senoidal de alta frecuencia. En consecuencia, aplicando la propiedad de traslación de frecuencia (o modulación) de la transformada de Fourier de la Sec. 2.3 a una señal de mensaje limitada en banda, se observa que la mayoría de los sistemas de transmisión de larga distancia tienen una respuesta en frecuencia **pasabanda**. Las propiedades son semejantes a las de un filtro pasabanda y cualquier señal transmitida por estos sistemas debe tener un espectro de pasabanda. Nuestro objetivo aquí es presentar las características y los métodos de análisis únicos para los sistemas y señales pasabanda. Antes de entrar en detalle, se establecerán algunas convenciones referentes a las señales del mensaje y las moduladas.

Convenciones para los mensajes analógicos

Siempre que sea posible, nuestro estudio de la comunicación analógica se expresará en función de una forma de onda $x(t)$ arbitraria del mensaje, la cual podría representar una función de muestra del conjunto de mensajes posibles producidos por una fuente de información. La condición esencial impuesta sobre $x(t)$ es que debe tener un **ancho de banda W del mensaje** razonablemente bien definido, de modo que haya un contenido espectral despreciable para $|f| > W$. De acuerdo con esto, la figura 4.4-1 representa un espectro de un mensaje típico $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, asumiendo que el mensaje es una señal de energía.

Por conveniencia matemática, también se escalarán o normalizarán todos los mensajes de modo que tengan una magnitud que no exceda la unidad, esto es,

$$|x(t)| \leq 1 \qquad [1]$$

Esta normalización pone un límite superior en el promedio de la potencia del mensaje, a saber:

$$S_x = \langle x^2(t) \rangle \leq 1 \qquad [2]$$

cuando se asume que $x(t)$ es una señal de potencia determinística. Se usarán ambos modelos de señales de potencia y energía para $x(t)$, dependiendo de cuál se ajuste mejor a las circunstancias.

A veces, el análisis con una $x(t)$ arbitraria resulta difícil de realizar, si no imposible. Bajo estas condiciones es posible recurrir al caso específico de modulación senoidal o de **tono**, tomando

$$x(t) = A_m \cos \omega_m t \qquad A_m \leq 1 \qquad f_m < W \qquad [3]$$

La modulación de tono permite trabajar con espectros de líneas unilaterales y simplifica los cálculos de potencia. Además, si se puede determinar la respuesta del sistema de modulación a una frecuencia específica f_m, se puede inferir la respuesta para todas las frecuencias en la banda del mensaje, quitando las no linealidades. Para revelar efectos no lineales potenciales, se debe usar modulación de **multitono**, por ejemplo,

$$x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + \cdots$$

con $A_1 + A_2 + \cdots \leq 1$ para satisfacer la ecuación (1).

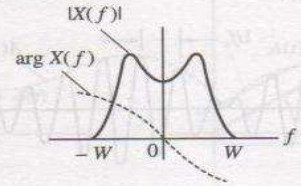


Figura 4.1-1 Espectro del mensaje con ancho de banda W.

Señales pasabanda

A continuación se explorarán las características únicas para las señales pasabanda (bp, por *bandpass*) y se establecerán algunas herramientas de análisis útiles en nuestras discusiones sobre la transmisión pasabanda. Considere una señal de energía $v_{bp}(t)$ real cuyo espectro $V_{bp}(f)$ tiene las características de pasabanda dibujadas en la figura 4.1-2*a*. Este espectro exhibe simetría de Hermite, porque $v_{bp}(t)$ es real, pero $V_{bp}(f)$ no necesariamente es simétrica con respecto a $\pm f_c$. Se define una **señal pasabanda** por la propiedad en el dominio de la frecuencia

$$V_{bp}(f) = 0 \quad |f| < f_c - W \quad |f| > f_c + W \qquad [4]$$

la cual establece sencillamente que la señal no tiene contenido espectral fuera de una banda de ancho $2W$ centrada en f_c. Los valores de f_c y W pueden ser algo arbitrarios, pero deben satisfacer la ecuación (4) con $W < f_c$.

La señal pasabanda correspondiente en la figura 4.1-2*b* se parece a una senoide de frecuencia f_c con una amplitud y un ángulo que cambian con lentitud. Formalmente, se escribe

$$v_{bp}(t) = A(t) \cos [\omega_c t + \phi(t)] \qquad [5]$$

donde $A(t)$ es la **envolvente** y $\phi(t)$ es la **fase**, ambas funciones del tiempo. La envolvente, mostrada como una línea punteada, se define como no negativa, de modo que $A(t) \geq 0$. Las "amplitudes" negativas, cuando ocurren, son absorbidas en la fase añadiendo $\pm 180°$.

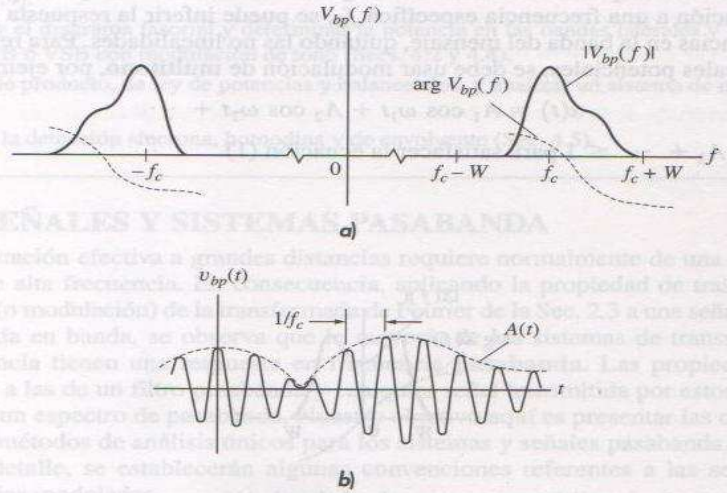


Figura 4.1-2 Señal pasabanda. *a*) Espectro; *b*) forma de onda.

La figura 4.1-3*a* ilustra a $v_{bp}(t)$ como un vector en el plano complejo cuya longitud es igual a $A(t)$ y cuyo ángulo es igual a $\omega_c t + \phi(t)$. Pero el término angular $\omega_c t$ representa una rotación estacionaria en sentido antihorario a f_c revoluciones por segundo y puede también suprimirse, lo que conduce a la figura 4.1-3*b*. La representación fasorial, usada regularmente de aquí en adelante, se relaciona con la figura 4.1-3*a* de la manera siguiente: si se fija el origen de la figura 4.1-3*b* y se gira toda la figura en el sentido antihorario con la frecuencia f_c, se convierte en la figura 4.1-3*a*.

Un examen adicional de la figura 4.1-3*a* sugiere otra forma de escribir $v_{bp}(t)$. Si se hace

$$v_i(t) \triangleq A(t) \cos \phi(t) \qquad v_q(t) \triangleq A(t) \operatorname{sen} \phi(t) \qquad [6]$$

entonces

$$v_{bp}(t) = v_i(t) \cos \omega_c t - v_q(t) \operatorname{sen} \omega_c t \qquad [7]$$

$$= v_i(t) \cos \omega_c t + v_q(t) \cos (\omega_c t + 90°)$$

La ecuación (7) se conoce como la descripción de **portadora en cuadratura** de una señal pasa banda, para distinguirla de la descripción de **envolvente y de fase** en la ecuación (5). Las funciones $v_i(t)$ y $v_q(t)$ se denominan **componentes en fase y en cuadratura**, respectivamente. La designación de portadora en cuadratura se debe a que los dos términos en la ecuación (7) pueden representarse por medio de fasores con el segundo, formando un ángulo de $+90°$ en relación con el primero.

Aunque ambas descripciones de una señal pasabanda son útiles, la versión de portadora en cuadratura tiene ventajas para la interpretación en el dominio de la frecuencia. Específicamente, la transformación de Fourier de la ecuación (7) da

$$V_{bp}(f) = \frac{1}{2}[V_i(f - f_c) + V_i(f + f_c)] + \frac{j}{2}[V_q(f - f_c) - V_q(f + f_c)] \qquad [8]$$

donde

$$V_i(f) = \mathcal{F}[v_i(t)] \qquad V_q(f) = \mathcal{F}[v_q(t)]$$

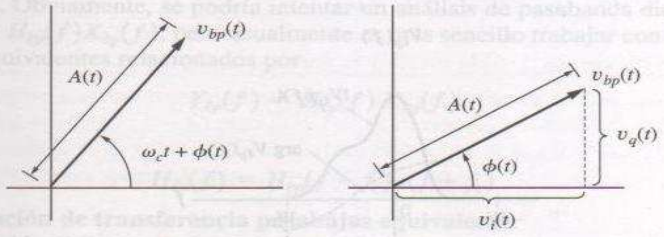


Figura 4.1-3 *a*) Fasor rotativo; *b*) diagrama fasorial con rotación suprimida.

Para obtener la ecuación (8) se ha usado el teorema de modulación de la ecuación (7), Sec. 2.3, junto con $e^{\pm j 90°} = \pm j$. La descripción de envolvente y de fase no se convierte con facilidad al dominio de la frecuencia ya que, a partir de la ecuación (6) o la figura 4.1-3*b*,

$$A(t) = \sqrt{v_i^2(t) + v_q^2(t)} \qquad \phi(t) = \arctan \frac{v_q(t)}{v_i(t)} \qquad [9]$$

que no son expresiones transformables en Fourier.

Una implicación inmediata de la ecuación (8) es que, para satisfacer la condición de pasa banda en la ecuación (4), las funciones en fase y en cuadratura deben ser señales **pasabaja** con

$$V_i(f) = V_q(f) = 0 \qquad |f| > W$$

En otras palabras

> $V_{bp}(f)$ está constituido por dos espectros pasabajas que se han trasladado y, en el caso de $V_q(f)$, desplazado en fase por 90°.

Se aprovechará esta propiedad en la definición del **espectro pasabajas equivalente**

$$V_{\ell p}(f) \triangleq \tfrac{1}{2}[V_i(f) + jV_q(f)] \qquad [10a]$$

$$= V_{bp}(f - f_c)u(f + f_c) \qquad [10b]$$

Como se muestra en la figura 4.1-4, $V_{\ell p}(f)$ simplemente es igual a la porción de frecuencia positiva de $V_{bp}(f)$ trasladada hacia el origen.

Pasando de la ecuación (10) al dominio del tiempo, se obtiene la **señal pasabajas equivalente**

$$v_{\ell p}(t) = \mathcal{F}^{-1}[V_{\ell p}(f)] = \tfrac{1}{2}[v_i(t) + jv_q(t)] \qquad [11a]$$

Así, $v_{\ell p}(t)$ es una señal *compleja* ficticia, cuya parte real es igual a $\frac{1}{2}v_i(t)$ y cuya parte imaginaria es igual a $\frac{1}{2}v_q(t)$. O bien, la conversión de rectangular a polar da

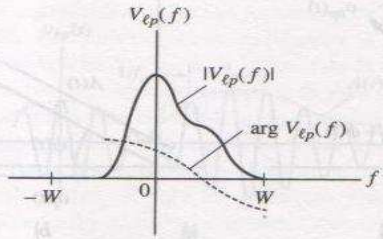


Figura 4.1-4 Espectro equivalente de pasabajas.

$$v_{\ell p}(t) = \tfrac{1}{2}A(t)e^{j\phi(t)} \qquad [11b]$$

donde se ha usado la ecuación (9) para escribir $v_{\ell p}(t)$ en términos de las funciones de envolvente y de fase. La naturaleza compleja de la señal pasabajas equivalente se deduce de su espectro $V_{\ell p}(f)$, el cual no tiene la simetría de Hermite requerida por la transformada de una función del tiempo real. No obstante, $v_{\ell p}(t)$ sí representa una señal pasabanda *real*.

La conexión entre $v_{\ell p}(t)$ y $v_{bp}(t)$ se infiere de las ecuaciones (5) y (11*b*) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} v_{bp}(t) &= \text{Re}\,\{A(t)e^{j[\omega_c t+\phi(t)]}\} \qquad [12] \\ &= 2\,\text{Re}\,[\tfrac{1}{2}A(t)e^{j\omega_c t}e^{j\phi(t)}] \\ &= 2\,\text{Re}\,[v_{\ell p}(t)e^{j\omega_c t}] \end{aligned}$$

Este resultado expresa la **transformación de pasabajas a pasabanda** en el dominio del tiempo. La transformación correspondiente en el dominio de la frecuencia es

$$V_{bp}(f) = V_{\ell p}(f - f_c) + V^*_{\ell p}(-f - f_c) \qquad [13a]$$

cuyo primer término constituye la porción de frecuencias positivas de $V_{bp}(f)$, mientras que el segundo término representa la porción de frecuencias negativas. Puesto que sólo se tratará con señales pasabanda reales, es posible tener en mente la simetría de Hermite de $V_{bp}(f)$ y usar la expresión más sencilla

$$V_{bp}(f) = V_{\ell p}(f - f_c) \qquad f > 0 \qquad [13b]$$

la cual se deduce de las figuras 4.1-2*a* y 4.1-4.

EJERCICIO 4.1-1

Asúmase que $z(t) = v_{\ell p}(t)e^{j\omega_c t}$ y úsese la relación $2\,\text{Re}\,[z(t)] = z(t) + z^*(t)$ para deducir la ecuación (13*a*) a partir de la ecuación (12).

Transmisión pasabanda

Ahora se cuenta con las herramientas necesarias para analizar la transmisión pasabanda representada por la figura 4.1-5*a*, en la cual una señal pasabanda $x_{bp}(t)$ aplicada a un sistema pasabanda con función de transferencia $H_{bp}(f)$ produce la salida pasabanda $y_{bp}(t)$. Obviamente, se podría intentar un análisis de pasabanda directo a través de $Y_{bp}(f) = H_{bp}(f)X_{bp}(f)$, pero usualmente es más sencillo trabajar con los espectros pasabajas equivalentes relacionados por

$$Y_{\ell p}(f) = H_{\ell p}(f)\,X_{\ell p}(f) \qquad [14a]$$

donde

$$H_{\ell p}(f) = H_{bp}(f - f_c)u(f + f_c) \qquad [14b]$$

que es la **función de transferencia pasabajas equivalente**.

La ecuación (14) permite remplazar un sistema pasabanda por el modelo equivalente de pasabajas en la figura 4.1-5*b*. Además de simplificar el análisis, el modelo de pasabajas proporciona información valiosa sobre los fenómenos pasabanda por la

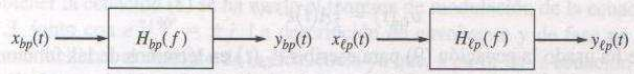


Figura 4.1-5 *a*) Sistema pasabanda; *b*) modelo pasabajas.

analogía con relaciones de pasabajas conocidas. Nos moveremos entre los modelos de pasabanda y los de pasabajas (lp, por *lowpass*) con la ayuda de los resultados anteriores para señales pasabanda.

En particular, luego de determinar $Y_{\ell p}(f)$ a partir de la ecuación (14), se puede tomar su transformada de Fourier inversa

$$y_{\ell p}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{\ell p}(f)] = \mathcal{F}^{-1}[H_{\ell p}(f)X_{\ell p}(f)]$$

La transformación de pasabajas a pasabanda en la ecuación (12) da entonces la señal de salida $y_{bp}(t)$. O se pueden obtener de inmediato las componentes de cuadratura o la de envolvente y la de fase a partir de $y_{\ell p}(t)$ como

$$\begin{aligned} y_i(t) &= 2\,\text{Re}\,[y_{\ell p}(t)] \qquad y_q(t) = 2\,\text{Im}\,[y_{\ell p}(t)] \qquad [15] \\ A_y(t) &= 2\,|y_{\ell p}(t)| \qquad \phi_y(t) = \arg\,[y_{\ell p}(t)] \end{aligned}$$

las cuales se deducen de la ecuación (10). El ejemplo que sigue ilustra una aplicación importante de estas técnicas.

EJEMPLO 4.1-1 **Retardo de portadora y de envolvente**

Considérese un sistema pasabanda con razón de amplitud constante, pero desplazamiento de fase $\theta(f)$ *no lineal* en su banda de paso. Entonces,

$$H_{bp}(f) = Ke^{j\theta(f)} \qquad f_\ell < |f| < f_u$$

y

$$H_{\ell p}(f) = Ke^{j\theta(f+f_c)}u(f + f_c) \qquad f_\ell - f_c < f < f_u - f_c$$

como se muestra en la figura 4.1-6. Considerando que las no linealidades de fase son relativamente suaves, es posible escribir la aproximación

$$\theta(f + f_c) \approx -2\pi(t_0 f_c + t_1 f)$$

donde

$$t_0 \triangleq -\frac{\theta(f_c)}{2\pi f_c} \qquad t_1 \triangleq -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{d\theta(f)}{df}\right|_{f=f_c} \qquad [16]$$

Esta aproximación proviene de los dos primeros términos de la expansión en serie de Taylor de $\theta(f + f_c)$.

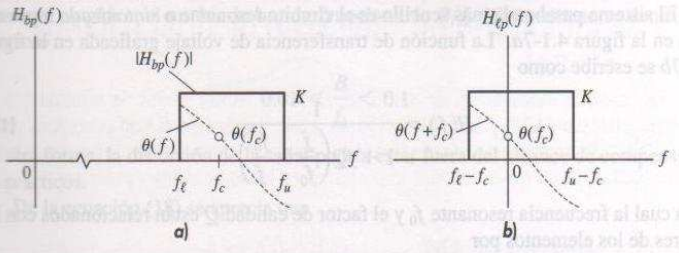


Figura 4.1-6 *a*) Función de transferencia de pasabanda; *b*) equivalente de pasabajas.

Para interpretar los parámetros t_0 y t_1, asúmase que la señal de entrada tiene fase cero de modo que $x_{bp}(t) = A_x(t)\cos\omega_c t$ y $x_{\ell p}(t) = \frac{1}{2}A_x(t)$. Si el espectro de la entrada $X_{bp}(f)$ cae completamente dentro de la pasabanda del sistema, entonces, de la ecuación (14),

$$Y_{\ell p}(f) = Ke^{j\theta(f+f_c)}X_{\ell p}(f) \approx Ke^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)}X_{\ell p}(f)$$
$$\approx Ke^{-j\omega_c t_0}[X_{\ell p}(f)e^{-j2\pi f t_1}]$$

Recordando el teorema de retardo en el tiempo, se ve que el segundo término corresponde a $x_{\ell p}(t)$ retardada en t_1. Por tanto,

$$y_{\ell p}(t) \approx Ke^{-j\omega_c t_0}x_{\ell p}(t - t_1) = Ke^{-j\omega_c t_0}\tfrac{1}{2}A_x(t - t_1)$$

y la ecuación (12) da la salida pasabanda

$$y_{bp}(t) \approx KA_x(t - t_1)\cos\omega_c(t - t_0)$$

Con base en este resultado, se concluye que t_0 es el **retardo de portadora**, mientras que t_1 es el **retardo de envolvente** del sistema. Y como t_1 es independiente de la frecuencia, al menos en lo que concierne a nuestra aproximación para $\theta(f + f_c)$, la envolvente no ha sufrido distorsión por retardo. El retardo de envolvente también se llama **retardo de grupo**.

Posteriormente, se describirán sistemas de **multiplexaje** en los cuales varias señales pasabanda con diferentes frecuencias de portadoras se transmiten por un solo canal. En este contexto se usan gráficas de $d\theta/df$ contra f para evaluar las características de retardo del canal. Si la curva no es razonablemente plana sobre una banda propuesta, se puede requerir del proceso de compensación de fase para evitar una excesiva distorsión de envolvente.

EJERCICIO 4.1-2

Asúmase que un sistema pasabandas tiene un desplazamiento de fase igual a cero, pero $|H_{bp}(f)| = K_0 + (K_1/f_c)(f - f_c)$ para $f_\ell < f < f_u$, donde $K_0 > (K_1/f_c)(f_\ell - f_c)$. Grafíquese $H_{bp}(f)$ tomando $f_\ell < f_c$ y $f_u > f_c$. Demuéstrese ahora que si $x_{bp}(t) = A_x(t)\cos\omega_c t$, entonces las componentes de cuadratura de $y_{bp}(t)$ son

$$y_i(t) = K_0 A_x(t) \qquad y_q(t) = -\frac{K_1}{2\pi f_c}\frac{dA_x(t)}{dt}$$

con tal de que $X_{bp}(f)$ caiga completamente dentro de la pasabanda del sistema.

El sistema pasabanda más sencillo es el circuito resonante o *sintonizado* representado en la figura 4.1-7*a*. La función de transferencia de voltaje graficada en la figura 4.1-7*b* se escribe como

$$H(f) = \frac{1}{1 + jQ\left(\dfrac{f}{f_0} - \dfrac{f_0}{f}\right)} \qquad [17a]$$

en la cual la frecuencia resonante f_0 y el factor de calidad Q están relacionados con los valores de los elementos por

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

El ancho de banda a 3 dB entre las frecuencias de cortes superior e inferior es

$$B = f_u - f_\ell = \frac{f_0}{Q} \qquad [17b]$$

Como los circuitos sintonizados prácticos tienen $10 < Q < 100$, el ancho de banda a 3 dB cae entre 1 y 10 por ciento del valor a la frecuencia central.

Un sistema pasabanda completo está conformado por el canal de transmisión más amplificadores sintonizados y dispositivos de acoplamiento conectados en cada extremo. Por tanto, la respuesta en frecuencia total tiene una forma más complicada que la de un simple circuito sintonizado. No obstante, diferentes efectos físicos producen una conexión laxa pero significativa entre el ancho de banda del sistema y la frecuencia portadora f_c similar a la ecuación (17*b*).

Por ejemplo, las antenas en un sistema de radio producen distorsión considerable, a menos que el intervalo de frecuencias sea pequeño comparado con f_c. Adicionalmente, el diseño de un amplificador pasabanda razonablemente sin distorsión resulta ser bastante difícil si B es muy grande o muy pequeño en comparación con f_c. Como

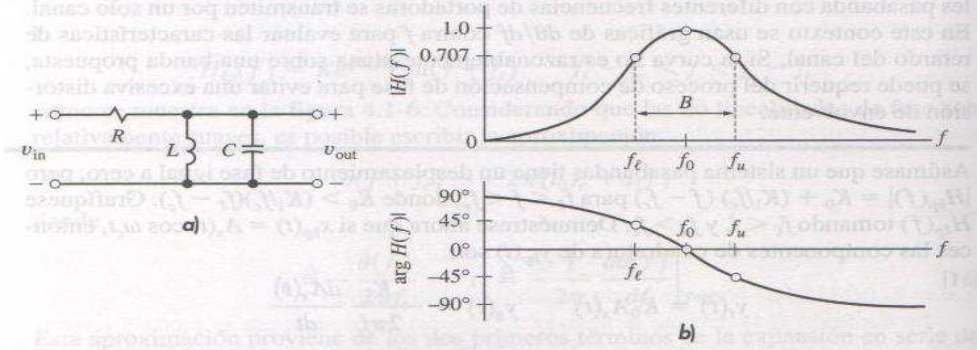


Figura 4.1-7 *a*) Circuito sintonizado; *b*) función de transferencia.

una regla empírica, el **ancho de banda fraccionario** B/f_c debe mantenerse dentro del intervalo

$$0.01 < \frac{B}{f_c} < 0.1 \qquad [18]$$

De otra forma, la distorsión de la señal podría estar fuera del alcance de compensadores prácticos.

De la ecuación (18) se aprecia que

Anchos de banda grandes requieren frecuencias portadoras altas.

Esta observación se subraya en la tabla 4.1-1, la cual muestra una lista de frecuencias portadoras seleccionadas y el ancho de banda nominal correspondiente $B \approx 0.02 f_c$ para diferentes bandas de frecuencias. Desde luego, es posible obtener anchos de banda más grandes pero a un costo sustancialmente mayor. Como una consecuencia adicional de la ecuación (18), los términos **pasabanda** y **banda angosta** son prácticamente sinónimos en la transmisión de señales.

Tabla 4.1-1 Frecuencias seleccionadas y anchos de bandas nominales

Banda de frecuencias	Frecuencia portadora	Ancho de banda
Radio de onda larga	100 kHz	2 kHz
Radio de onda corta	5 MHz	100 kHz
VHF	100 MHz	2 MHz
Microondas	5 GHz	100 MHz
Ondas milimétricas	100 GHz	2 GHz
Ópticas	5×10^{14} Hz	10^{13} Hz

Transmisión de pulsos pasabanda **EJEMPLO 4.1-2**

En la Sec. 3.4 se vio que la transmisión de un pulso de duración t requiere de un ancho de banda pasabajas $B \geq 1/2\tau$. También se halló en el ejemplo 2.3-2 que la traslación de frecuencia convierte un pulso en una señal pasabanda y *duplica* su ancho espectral. Considerando estas dos observaciones, se concluye que la transmisión de pulsos pasabanda requiere que

$$B \geq 1/\tau$$

Como la ecuación (18) impone la restricción adicional de que $0.1 f_c > B$, la frecuencia portadora debe satisfacer

$$f_c > 10/\tau$$

Estas relaciones han servido por mucho tiempo como guías útiles en el trabajo de radar y campos relacionados. Como ejemplo, $\tau = 1\ \mu$s, entonces la transmisión en pasabanda requiere que $B \geq 1$ MHz y $f_c > 10$ MHz.

4.2 MODULACIÓN DE AMPLITUD DE DOBLE BANDA LATERAL

Hay dos tipos de modulación de amplitud de doble banda lateral: la modulación de amplitud estándar (AM) y la modulación de doble banda lateral con portadora suprimida (DSB). Se examinarán ambos tipos y se mostrará que las pocas diferencias teóricas entre ellas tienen repercusiones importantes en las aplicaciones prácticas.

Señales y espectros de AM

La propiedad exclusiva de la AM es que la *envolvente* de la portadora modulada tiene la misma *forma* que el mensaje. Si A_c denota la amplitud de la portadora no modulada, la modulación por $x(t)$ produce la envolvente modulada

$$A(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \qquad [1]$$

donde μ es una constante positiva denominada **índice de modulación**. La señal AM completa $x_c(t)$ es entonces

$$x_c(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \cos \omega_c t \qquad [2]$$
$$= A_c \cos \omega_c t + A_c \mu x(t) \cos \omega_c t$$

Puesto que $x_c(t)$ no tiene fase variable en el tiempo, sus componentes en fase y en cuadratura son

$$x_{ci}(t) = A(t) \qquad x_{cq}(t) = 0$$

obtenidas a partir de las ecuaciones (5) y (6), Sec. 4.1, con $\phi(t) = 0$. En realidad, se debería incluir un desplazamiento de fase constante en la portadora para recalcar que la portadora y el mensaje provienen de fuentes independientes y no sincronizadas. Sin embargo, el colocar una fase constante en la ecuación (2) aumenta la complejidad notacional sin que aporte nada a la comprensión física.

La figura 4.2-1 muestra parte de un mensaje común y la señal AM resultante para dos valores de μ. La envolvente reproduce claramente la forma de $x(t)$ si

$$f_c \gg W \qquad \mu \leq 1 \qquad [3]$$

Cuando se cumplen estas condiciones, el mensaje $x(t)$ se extrae fácilmente de $x_c(t)$ mediante el uso de un simple **detector de envolvente** cuya circuitería se describirá en la Sec. 4.5.

La condición $f_c \gg W$ asegura que la portadora oscile rápidamente en comparación con la variación en el tiempo de $x(t)$; de otra forma, no se podría visualizar una envolvente. La condición $\mu \leq 1$ asegura que $A_c[1 + \mu x(t)]$ no se haga negativa. Con 100 por ciento de modulación ($\mu = 1$), la envolvente varía entre $A_{\text{mín}} = 0$ y $A_{\text{máx}} = 2A_c$. La **sobremodulación** ($\mu > 1$) ocasiona **inversiones de fase** y **distorsión de envolvente** ilustradas en la figura 4.2-1*c*.

Pasando al dominio de la frecuencia, la transformada de Fourier de la ecuación (2) da

$$X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\,\delta(f - f_c) + \frac{\mu}{2}A_c X(f - f_c) \qquad f > 0 \qquad [4]$$

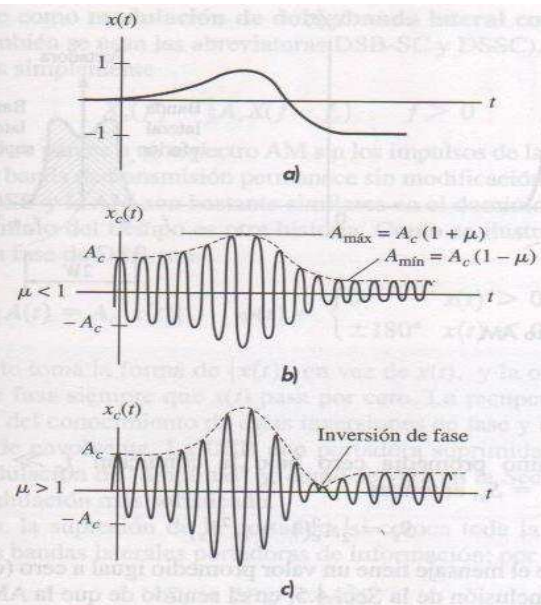


Figura 4.2-1 Señales AM. *a)* Mensaje; *b)* onda AM con $\mu < 1$; *c)* onda AM con $\mu > 1$.

donde se ha escrito sólo la parte correspondiente a las frecuencias positivas de $X_c(f)$. La porción de frecuencias negativas será la imagen de Hermite de la ecuación (4) ya que $x_c(t)$ es una señal real pasabanda. Ambas mitades de $X_c(f)$ se dibujan en la figura 4.2-2 con $X(f)$ de la figura 4.1-1. El espectro de AM está formado por impulsos en la frecuencia portadora y **bandas laterales simétricas** centradas en $\pm f_c$. La presencia de **bandas laterales superiores** e **inferiores** explica el nombre de la modulación de amplitud de **doble banda lateral**. También explica el **ancho de banda de transmisión** de la AM

$$B_T = 2W \qquad [5]$$

Obsérvese que la AM requiere el doble del ancho de banda necesario para transmitir $x(t)$ en la banda base sin modulación.

El ancho de banda de transmisión es una consideración importante para la comparación de los sistemas de modulación. Otra consideración importante es la **potencia promedio transmitida**

$$S_T \triangleq \langle x_c^2(t) \rangle$$

Al expandir $x_c^2(t)$ usando la ecuación (2), se tiene

$$S_T = \tfrac{1}{2}A_c^2\langle 1 + 2\mu x(t) + \mu^2 x^2(t)\rangle + \tfrac{1}{2}A_c^2\langle [1 + \mu x(t)]^2 \cos 2\omega_c t\rangle$$

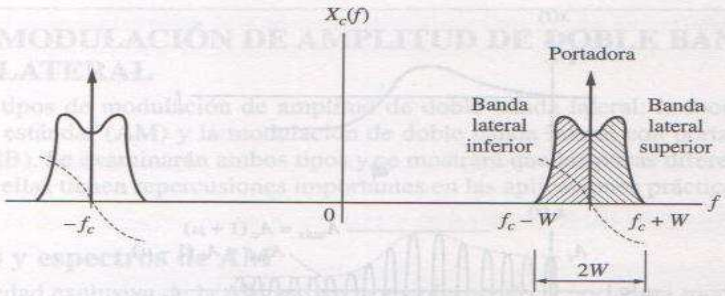


Figura 4.2-2 Espectro AM.

cuyo segundo término promedia cero bajo la condición $f_c \gg W$. Por ello, si $\langle x(t)\rangle = 0$ y $\langle x^2(t)\rangle = S_x$, entonces

$$S_T = \tfrac{1}{2}A_c^2(1 + \mu^2 S_x) \qquad [6]$$

La suposición de que el mensaje tiene un valor promedio igual a cero (o sin componente de cd) anticipa la conclusión de la Sec. 4.5, en el sentido de que la AM ordinaria no es práctica para transmitir señales con un contenido significativo de bajas frecuencias.

Se pone en evidencia la interpretación de la ecuación (6) escribiéndola en la forma

$$S_T = P_c + 2P_{sb}$$

donde

$$P_c = \tfrac{1}{2}A_c^2 \qquad P_{sb} = \tfrac{1}{4}A_c^2\mu^2 S_x = \tfrac{1}{2}\mu^2 S_x P_c \qquad [7]$$

El término P_c representa la **potencia de la portadora no modulada**, ya que $S_T = P_c$ cuando $\mu = 0$; el término P_{sb} representa la **potencia por banda lateral** ya que, cuando $\mu \neq 0$, S_T está constituida por la potencia de la portadora más dos bandas laterales simétricas. La restricción para la modulación $|\mu x(t)| \leq 1$ requiere que $\mu^2 S_x \leq 1$, de modo que $P_{sb} \leq \frac{1}{2}P_c$ y

$$P_c = S_T - 2P_{sb} \geq \tfrac{1}{2}S_T \qquad P_{sb} \leq \tfrac{1}{4}S_T \qquad [8]$$

En consecuencia, al menos 50 por ciento de la potencia transmitida total reside en un término de portadora que es independiente de $x(t)$ y, por tanto, no lleva información del mensaje.

Señales y espectros de DSB

La potencia portadora "desperdiciada" en la modulación de amplitud se elimina haciendo $\mu = 1$ y suprimiendo la componente de la frecuencia portadora no modulada. La onda modulada resultante se convierte en

$$x_c(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t \qquad [9]$$

la cual se conoce como **modulación de doble banda lateral con portadora suprimida** o DSB (también se usan las abreviaturas DSB-SC y DSSC). La transformada de la ecuación (9) es simplemente

$$X_c(f) = \tfrac{1}{2}A_c X(f - f_c) \qquad f > 0$$

y el espectro DSB se parece a un espectro AM sin los impulsos de la portadora no modulada. El ancho de banda de transmisión permanece sin modificación en $B_T = 2W$.

Aunque la DSB y la AM son bastante similares en el dominio de la frecuencia, la imagen en el dominio del tiempo es otra historia. Como se ilustra en la figura 4.2-3, la envolvente y la fase de DSB son

$$A(t) = A_c\,|x(t)| \qquad \phi(t) = \begin{cases} 0 & x(t) > 0 \\ \pm 180^\circ & x(t) < 0 \end{cases} \qquad \textbf{[10]}$$

Aquí la envolvente toma la forma de $|x(t)|$, en vez de $x(t)$, y la onda modulada sufre una **inversión de fase** siempre que $x(t)$ pasa por cero. La recuperación completa del mensaje requiere del conocimiento de estas inversiones de fase y no se puede obtener con un detector de envolvente. La DSB con portadora suprimida involucra entonces más que una modulación de "amplitud" y, como se verá en la Sec. 4.5, se necesita un proceso de demodulación más sofisticado.

Sin embargo, la supresión de la portadora sí coloca toda la potencia promedio transmitida en las bandas laterales portadoras de información; por ello

$$S_T = 2P_{sb} = \tfrac{1}{2}A_c^2 S_x \qquad \textbf{[11]}$$

la cual se cumple aun cuando $x(t)$ incluya una componente cd. De las ecuaciones (11) y (9) se advierte que la DSB aprovecha mejor la potencia promedio total disponible en un transmisor dado. Los transmisores prácticos también imponen un límite a la **potencia pico de la envolvente** $A_{\text{máx}}^2$. Esta limitación en la potencia pico se tomará en cuenta

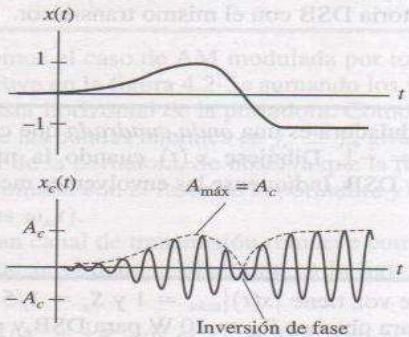


Figura 4.2-3 Formas de ondas DSB.

examinando la relación $P_{sb}/A_{\text{máx}}^2$ bajo condiciones de máxima modulación. Usando la ecuación (11) con $A_{\text{máx}} = A_c$ para DSB y usando la ecuación (7) con $A_{\text{máx}} = 2A_c$ para AM, se encontrará que

$$P_{sb}/A_{\text{máx}}^2 = \begin{cases} S_x/4 & \text{DSB} \\ S_x/16 & \text{AM con } \mu = 1 \end{cases} \qquad \textbf{[12]}$$

Por tanto, si $A_{\text{máx}}^2$ es fija y los otros factores se mantienen iguales, un transmisor DSB produce cuatro veces la potencia en las bandas laterales de un transmisor AM.

Las consideraciones anteriores sugieren un intercambio entre la eficiencia de la potencia y los métodos de demodulación.

La DSB conserva potencia, pero requiere de circuitos de demodulación más complicados, mientras que la AM requiere de mayor potencia para permitir la detección de la envolvente de manera sencilla.

EJEMPLO 4.2-1

Considérese un radiotransmisor especificado para $S_T \le 3$ kW y $A_{\text{máx}}^2 \le 8$ kW. Asuma que la señal moduladora es de un solo tono con $A_m = 1$ de modo que $S_x = A_m^2/2 = \frac{1}{2}$. Si la modulación es DSB, la máxima potencia posible por banda lateral es igual al menor de los dos valores determinados por las ecuaciones (11) y (12). Entonces

$$P_{sb} = \tfrac{1}{2}S_T \le 1.5 \text{ kW} \qquad P_{sb} = \tfrac{1}{8}A_{\text{máx}}^2 \le 1.0 \text{ kW}$$

que dan el límite superior $P_{sb} = 1.0$ kW.

Si la modulación es AM con $\mu = 1$, entonces la ecuación (12) requiere que $P_{sb} = A_{\text{máx}}^2/32 \le 0.25$ kW. Para verificar la limitación sobre la potencia promedio, se observa de la ecuación (7) que $P_{sb} = P_c/4$, de modo que $S_T = P_c + 2P_{sb} = 6P_{sb}$ y $P_{sb} = S_T/6 \le 0.5$ kW. Por tanto, el límite de la potencia pico domina, y la potencia máxima en las bandas laterales es $P_{sb} = 0.25$ kW. Como el alcance de la transmisión es proporcional a P_{sb}, la longitud de la trayectoria AM sería solamente de 25 por ciento de la longitud de la trayectoria DSB con el mismo transmisor.

EJERCICIO 4.2-1

Asúmase que la señal moduladora es una *onda cuadrada* que conmuta periódicamente entre $x(t) = +1$ y $x(t) = -1$. Dibújese $x_c(t)$ cuando la modulación es AM con $\mu = 0.5$, AM con $\mu = 1$ y DSB. Indíquense las envolventes mediante líneas punteadas.

EJERCICIO 4.2-2

Asúmase que una señal de voz tiene $|x(t)|_{\text{máx}} = 1$ y $S_x = 1/5$. Calcúlense los valores de S_T y $A_{\text{máx}}^2$ necesarios para obtener $P_{sb} = 10$ W para DSB y para AM con $\mu = 1$.

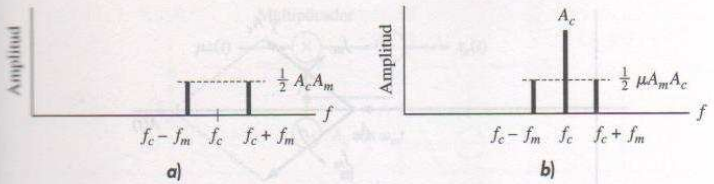


Figura 4.2-4 Espectros de líneas para modulación de tono. *a*) DSB; *b*) AM.

Modulación de tono y análisis fasorial

Haciendo $x(t) = A_m \cos \omega_m t$ en la ecuación (9) da la señal DSB modulada por tono

$$x_c(t) = A_c A_m \cos \omega_m t \cos \omega_c t \qquad \textbf{[13a]}$$

$$= \frac{A_c A_m}{2} \cos (\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c A_m}{2} \cos (\omega_c + \omega_m)t$$

donde se ha usado la expansión trigonométrica para el producto de cosenos. Una expansión similar de la ecuación (2) da la onda AM modulada por tono

$$x_c(t) = A_c \cos \omega_c t + \frac{A_c \mu A_m}{2} \cos (\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c \mu A_m}{2} \cos (\omega_c + \omega_m)t \qquad \textbf{[13b]}$$

La figura 4.2-4 muestra los espectros de líneas para frecuencias positivas obtenidas a partir de las ecuaciones (13*a*) y (13*b*).

De la figura 4.2-4 se deduce que la DSB o la AM moduladas por tono pueden considerarse una suma de *fasores* ordinarios, uno para cada línea espectral. Este punto de vista sugiere el uso del análisis fasorial para determinar la envolvente y la fase o los términos de la portadora en cuadratura. El análisis fasorial es especialmente útil en el estudio de los efectos de la transmisión con distorsión, la interferencia, etc., como se demuestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.2-2

Por conveniencia, tomemos el caso de AM modulada por tono con $\mu A_m = \frac{2}{3}$. El diagrama fasorial se construye en la figura 4.2-5*a* sumando los fasores de las bandas laterales con la punta del fasor horizontal de la portadora. Como la frecuencia de la portadora es f_c, los fasores de las bandas laterales en $f_c \pm f_m$ giran con velocidades de $\pm f_m$ en relación con el fasor de la portadora. Se observa que la resultante de los fasores de las bandas laterales es colineal con el fasor de la portadora y el fasor suma es igual a la envolvente $A_c(1 + \frac{2}{3} \cos \omega_m t)$.

Pero asúmase que un canal de transmisión remueve completamente la banda lateral inferior, de modo que se obtiene el diagrama en la figura 4.2-5*b*. Ahora la envolvente es

$$A(t) = [(A_c + \tfrac{1}{3}A_c \cos \omega_m t)^2 + (\tfrac{1}{3}A_c \operatorname{sen} \omega_m t)^2]^{1/2}$$
$$= A_c \sqrt{\tfrac{10}{9} + \tfrac{2}{3} \cos \omega_m t}$$

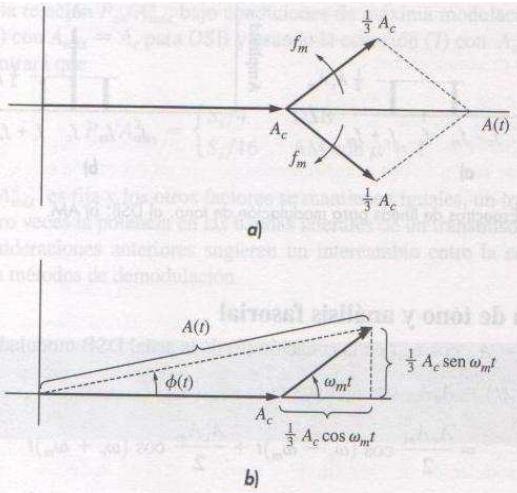


Figura 4.2-5 Diagramas fasoriales para el ejemplo 4.2-2.

a partir de la cual se puede determinar la *distorsión de envolvente*. Obsérvese también que la distorsión de amplitud en la transmisión ha producido una *fase* $\phi(t)$ *variable en el tiempo*.

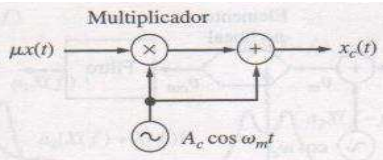
EJERCICIO 4.2-3 Dibújese el diagrama fasorial para la DSB modulada por tono con $A_m = 1$. Después determínese $A(t)$ y $\phi(t)$ cuando la amplitud de la banda lateral inferior se reduce a la mitad.

4.3 MODULADORES Y TRANSMISORES

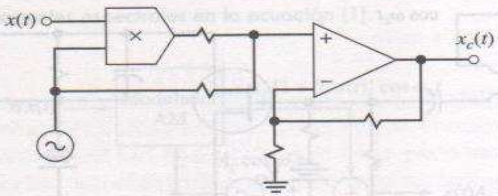
Las bandas laterales de una señal AM o DSB contienen nuevas frecuencias que no estaban presentes en la portadora o el mensaje. Por ello, el modulador debe ser un sistema **variante en el tiempo** o **no lineal**, ya que los sistemas LIT nunca producen nuevos componentes de frecuencia. En esta sección se describen los principios de operación de moduladores y transmisores que emplean dispositivos de producto, de ley cuadrática o de conmutación. Los diseños detallados del circuito están dados en las referencias citadas en las lecturas complementarias.

Moduladores de producto

La figura 4.3-1*a* es el diagrama de bloques de un **modulador de producto** para AM basado en la ecuación $x_c(t) = A_c \cos \omega_c t + \mu x(t) A_c \cos \omega_c t$. El diagrama esquemático en la figura 4.3-1*b* muestra este modulador con un multiplicador analógico y un sumador op-amp. Por supuesto, un modulador de producto para DSB sólo necesita el



a)



b)

Figura 4.3-1 a) Modulador de producto para AM; b) diagrama esquemático con multiplicador analógico.

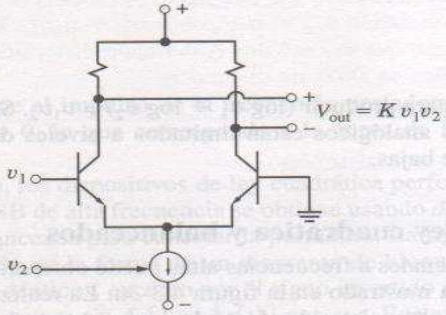
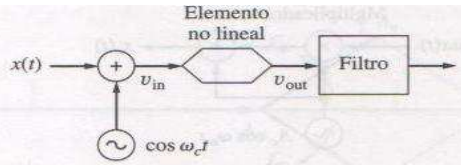


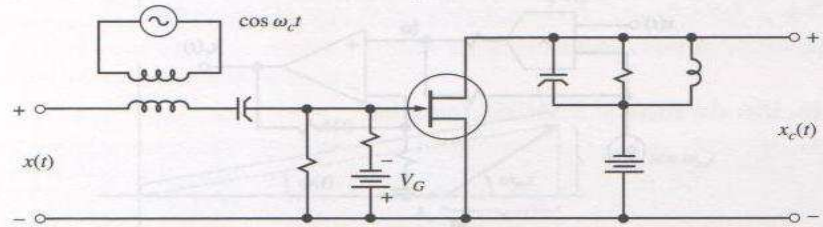
Figura 4.3-2 Circuito para el multiplicador de transconductancia variable.

multiplicador para producir $x_c(t) = x(t)A_c \cos \omega_c t$. En cualquier caso, la operación crucial es la *multiplicación* de dos señales analógicas.

La multiplicación analógica se realiza electrónicamente de varias formas. Un diseño popular con circuitos integrados es el **multiplicador de transconductancia variable** ilustrado en la figura 4.3-2. Aquí, el voltaje de entrada v_1 se aplica a un amplificador diferencial cuya ganancia depende de la transconductancia de los transistores, la cual, a su vez, varía con la corriente total del emisor. La entrada v_2 controla la corriente del emisor mediante un convertidor de voltaje-a-corriente, de modo que la salida diferencial es igual a Kv_1v_2. Otros circuitos obtienen la multiplicación directamente con dispositivos de **efecto de Hall**, o indirectamente con **amplificadores log**



a)



b)

Figura 4.3-3 a) Modulador de ley cuadrática; b) Realización de circuito con un FET.

y **antilog** conectados para producir $(\log v_1 + \log v_2) = v_1 v_2$. Sin embargo, la mayoría de los multiplicadores analógicos están limitados a niveles de potencia bajos y frecuencias relativamente bajas.

Moduladores de ley cuadrática y balanceados

La multiplicación de señales a frecuencias altas puede obtenerse mediante el **modulador de ley cuadrática** mostrado en la figura 4.3-3*a*. La realización del circuito en la figura 4.3-3*b* emplea un transistor de efecto de campo como el elemento no lineal y un circuito RLC paralelo como el filtro. Se asume que el elemento no lineal aproxima la curva de transferencia de ley cuadrática

$$v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2$$

Por ello, con $v_{in}(t) = x(t) + \cos \omega_c t$,

$$v_{out}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) + a_2 \cos^2 \omega_c t + a_1 \left[1 + \frac{2a_2}{a_1} x(t) \right] \cos \omega_c t \qquad [1]$$

El último término es la onda AM deseada, con $A_c = a_1$ y $\mu = 2a_2/a_1$, siempre que pueda separarse del resto.

Por lo que respecta a la posibilidad de la separación, la figura 4.3-4 muestra el espectro $V_{out}(f) = \mathcal{F}[v_{out}(t)]$ tomando a $X(f)$ como en la figura 4.1-1. Observe que el término $x^2(t)$ en la ecuación (1) se convierte en $X * X(f)$, que está limitado en banda a $2W$. En consecuencia, si $f_c > 3W$, no hay traslape espectral y se puede obtener la separación requerida con un filtro pasabanda de ancho de banda $B_T = 2W$ centrado en

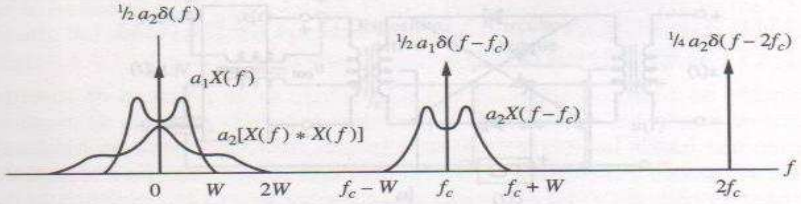


Figura 4.3-4 Componentes espectrales en la ecuación (1).

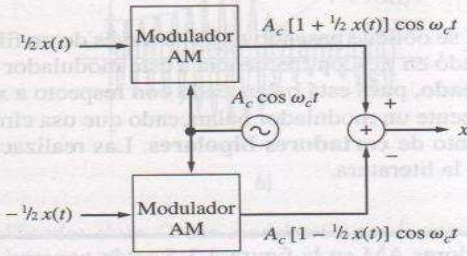


Figura 4.3-5 Modulador balanceado.

Observe también que el impulso de la frecuencia portadora desaparece y se tiene una onda DSB si $a_1 = 0$, lo que corresponde a la curva de ley cuadrática *perfecta* $v_{out} = a_2 v_{in}^2$.

Desgraciadamente, los dispositivos de ley cuadrática perfecta son raros, de modo que en la práctica la DSB de alta frecuencia se obtiene usando *dos* moduladores AM en una configuración balanceada para cancelar la portadora. La figura 4.3-5 muestra este **modulador balanceado** en la forma de un diagrama de bloques. Asumiendo que los moduladores AM son idénticos, excepto por el signo invertido de una entrada, las salidas son $A_c[1 + \frac{1}{2}x(t)] \cos \omega_c t$ y $A_c[1 - \frac{1}{2}x(t)] \cos \omega_c t$. Restando una de la otra produce $x_c(t) = x(t)A_c \cos \omega_c t$, como se requiere. Por tanto, un modulador balanceado es un multiplicador. Se debe observar que si el mensaje tiene un *término cd*, ese componente *no* se cancela en el modulador, aun cuando aparece en la frecuencia de la portadora en la onda modulada.

Otro modulador que se usa comúnmente para generar señales DSB es el *modulador de anillo*, mostrado en la figura 4.3-6. Una portadora de onda cuadrada $c(t)$ con frecuencia f_c hace que los diodos conmuten entre conducción y no conducción. Cuando $c(t) > 0$ los diodos superior e inferior conducen, mientras que los diodos internos en la sección de las ramas cruzadas no conducen. En este caso $v_{out} = x(t)$, inversamente, cuando $c(t) < 0$, los diodos internos conducen y los otros diodos no, resultando en $v_{out} = -x(t)$. Desde un punto de vista funcional, el modulador de anillo se considera un multiplicador de $x(t)$ y $c(t)$. Sin embargo, como $c(t)$ es una función periódica, se representa por una expansión en serie de Fourier; esto es,

$$v_{out}(t) = \frac{4}{\pi} x(t) \cos \omega_c t - \frac{4}{3\pi} x(t) \cos 3\omega_c t + \frac{4}{5\pi} x(t) \cos 5\omega_c t - \cdots$$

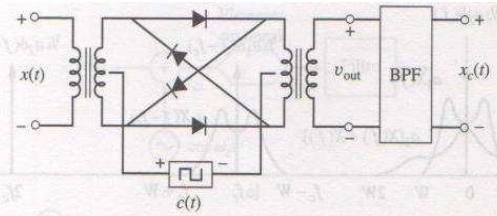


Figura 4.3-6 Modulador de anillo.

Observe que la señal DSB se obtiene pasando $v_{out}(t)$ a través de un filtro pasa banda con ancho de banda $2W$ centrado en f_c. Con frecuencia a este modulador se le conoce como modulador **doble balanceado**, pues está balanceado con respecto a $x(t)$ y $c(t)$.

En el capítulo 6 se discute un modulador balanceado que usa circuitos de conmutación bajo el encabezamiento de **cortadores bipolares**. Las realizaciones de otros circuitos se pueden hallar en la literatura.

EJERCICIO 4.3-1 Asúmase que los moduladores AM en la figura 4.3-5 están construidos con elementos no lineales idénticos que tienen $v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 + a_3 v_{in}^3$. Tómese $v_{in} = \pm x(t) + A_c \cos \omega_c t$ y demuéstrese que las señales AM tienen distorsión de la segunda armónica; no obstante, la salida es DSB sin distorsión.

Moduladores de conmutación

En vista de la gran cantidad de filtrado requerido, los moduladores de ley cuadrática se utilizan principalmente para modulación de *bajo nivel*, esto es, a niveles de potencia más bajos que el valor transmitido. Entonces es necesaria una amplificación lineal sustancial para subir la potencia hasta S_T. Pero los amplificadores de potencia de RF con la linealidad requerida tienen sus propios problemas y, con frecuencia, es mejor emplear modulación de *alto nivel* si se desea una S_T grande.

Los moduladores eficientes de alto nivel están arreglados de modo que los productos de la modulación no deseados nunca se desarrollen completamente y no tengan que ser filtrados. Esto se obtiene usualmente con la ayuda de un dispositivo de *conmutación*, cuyo análisis detallado se pospone para el capítulo 6. Sin embargo, la operación básica del amplificador clase C modulado por el voltaje de alimentación se entiende con facilidad a partir de su circuito equivalente idealizado y las formas de ondas en la figura 4.3-7.

El dispositivo activo, por lo común un transistor, sirve como un conmutador operado a la frecuencia portadora, cerrando brevemente cada $1/f_c$ segundos. La carga RLC, llamada circuito-**tanque**, está sintonizada para resonar en f_c, de modo que la acción de conmutación hace que el circuito-tanque "resuene" senoidalmente. El voltaje de carga en régimen permanente en la ausencia de modulación es entonces $v(t) = V \cos \omega_c t$. Al añadir el mensaje al voltaje de alimentación, digamos a través de un transformador, da $v(t) = [V + Nx(t)] \cos \omega_c t$, donde N es la relación de vueltas del transformador. Si V y N están proporcionados correctamente, se alcanza la modulación deseada sin generación apreciable de componentes indeseados.

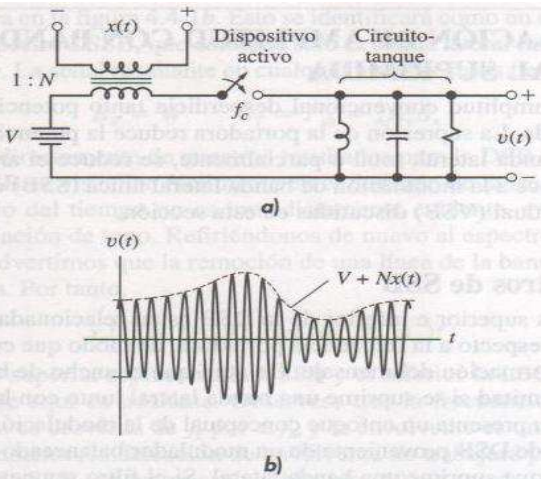


Figura 4.3-7 Amplificador clase C con modulación por fuente de alimentación. *a*) Circuito equivalente; *b*) forma de onda de salida.

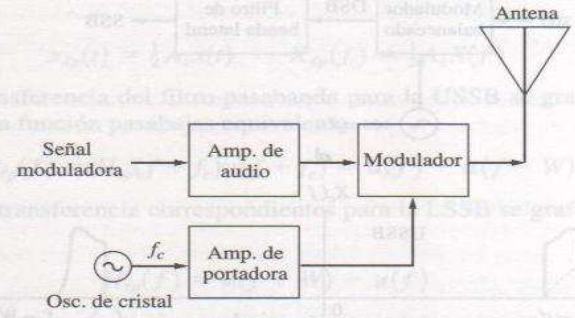


Figura 4.3-8 Transmisor AM con modulación de alto nivel.

En la figura 4.3-8 se presenta el diagrama de un transmisor AM completo para el caso de modulación de alto nivel. La onda portadora es generada por un oscilador controlado por cristal para asegurar la estabilidad de la frecuencia portadora. Como la modulación de alto nivel demanda fuertes señales de entrada, tanto la portadora como el mensaje son amplificados antes de la modulación. La señal modulada se suministra entonces directamente a la antena.

4.4 MODULACIÓN DE AMPLITUD CON BANDA LATERAL SUPRIMIDA

La modulación de amplitud convencional desperdicia tanto potencia de transmisión como ancho de banda. La supresión de la portadora reduce la potencia de transmisión. Suprimiendo una banda lateral, total o parcialmente, se reduce el ancho de banda de transmisión y conduce a la modulación de banda lateral única (SSB) o a la modulación de banda lateral residual (VSB) discutidas en esta sección.

Señales y espectros de SSB

Las bandas laterales superior e inferior de la DSB están relacionadas en forma única por la simetría con respecto a la frecuencia portadora, de modo que cualquiera de ellas contiene *toda* la información del mensaje. De aquí que el ancho de banda de transmisión se reduzca a la mitad si se suprime una banda lateral junto con la portadora.

La figura 4.4-1*a* presenta un enfoque conceptual de la modulación de banda lateral única. Aquí la señal de DSB proveniente de un modulador balanceado se aplica a un filtro de banda lateral que suprime una banda lateral. Si el filtro remueve la banda lateral inferior, el espectro de salida $X_c(f)$ está constituido solamente por la banda lateral supe-

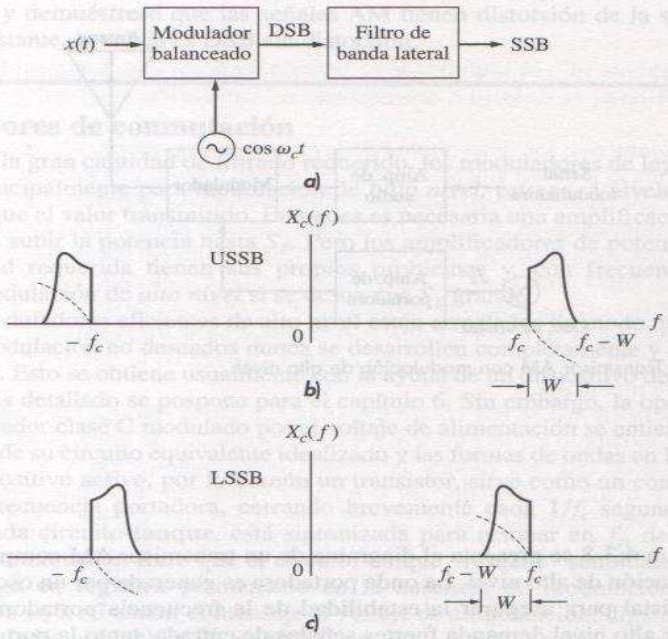


Figura 4.4-1 Modulación de banda lateral única. *a*) Modulador; *b*) espectro USSB; *c*) espectro LSSB.

mor, como se ilustra en la figura 4.4-1*b*. Esto se identificará como un espectro USSB para distinguirlo del espectro LSSB, que contiene sólo la banda lateral inferior, como lo ilustra la figura 4.4-1*c*. La señal resultante en cualquiera de los casos tiene

$$B_T = W \qquad S_T = P_{sb} = \tfrac{1}{4}A_c^2 S_x \qquad [1]$$

lo cual se deduce directamente de nuestros resultados para la DSB.

Aunque la SSB se visualiza fácilmente en el dominio de la frecuencia, la descripción en el dominio del tiempo no es inmediatamente evidente, excepto para el caso especial de modulación de tono. Refiriéndonos de nuevo al espectro de líneas DSB en la figura 4.4-4*a*, advertimos que la remoción de una línea de la banda lateral deja solamente la otra línea. Por tanto,

$$x_c(t) = \tfrac{1}{2}A_c A_m \cos(\omega_c \pm \omega_m)t \qquad [2]$$

en la cual el signo superior representa la USSB y el inferior la LSSB, una convención que se empleará de aquí en adelante. Obsérvese que la frecuencia de una onda SSB modulada por tono es desviada de f_c por $\pm f_m$ y la envolvente es una constante proporcional a A_m. Obviamente, la detección de envolvente no trabajará para la SSB.

Para analizar la SSB con un mensaje arbitrario $x(t)$, se usará el hecho de que el filtro de banda lateral en la figura 4.4-1*a* es un sistema *pasabanda* con una entrada DSB pasabanda $x_{bp}(t) = A_c x(t) \cos \omega_c t$ y una salida SSB pasabanda $y_{bp}(t) = x_c(t)$. Por tanto, se determinará $x_c(t)$ aplicando el *método equivalente de pasabajas* de la Sec. 4.1. Como $x_{bp}(t)$ no tiene componente en cuadratura, la entrada pasabajas equivalente es sencillamente

$$x_{\ell p}(t) = \tfrac{1}{2}A_c x(t) \qquad X_{\ell p}(f) = \tfrac{1}{2}A_c X(f)$$

La función de transferencia del filtro pasabanda para la USSB se grafica en la figura 4.4-2*a* junto con la función pasabajas equivalente

$$H_{\ell p}(f) = H_{bp}(f + f_c)u(f + f_c) = u(f) - u(f - W)$$

Las funciones de transferencia correspondientes para la LSSB se grafican en la figura 4.4-2*b*, donde

$$H_{\ell p}(f) = u(f + W) - u(f)$$

Ambas funciones de transferencia pasabajas se representan por medio de

$$H_{\ell p}(f) = \tfrac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn} f) \qquad |f| \le W \qquad [3]$$

Usted debe confirmar por sí mismo que esta expresión más bien extraña sí incluye ambas partes de la figura 4.4-2.

Multiplicando $H_{\ell p}(f)$ y $X_{\ell p}(f)$ se obtiene el espectro equivalente pasabajas para la USSB o la LSSB, a saber:

$$Y_{\ell p}(f) = \tfrac{1}{4}A_c(1 \pm \operatorname{sgn} f)X(f) = \tfrac{1}{4}A_c[X(f) \pm (\operatorname{sgn} f)X(f)]$$

Recuérdese ahora que $(-j \operatorname{sgn} f)X(f) = \mathcal{F}[\hat{x}(t)]$, donde $\hat{x}(t)$ es la *transformada de Hilbert* de $x(t)$ definida en la Sec. 3.5. Por tanto, $\mathcal{F}^{-1}[(\operatorname{sgn} f)X(f)] = j\hat{x}(t)$ y

$$y_{\ell p}(t) = \tfrac{1}{4}A_c[x(t) \pm j\hat{x}(t)]$$

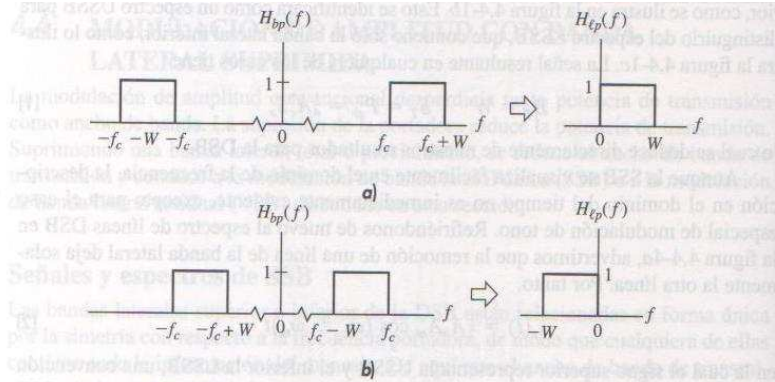


Figura 4.4-2 Filtros ideales de banda laterales y equivalentes pasabajas. *a)* USSB; *b)* LSSB.

Finalmente, se calcula la transformación de pasabajas a pasabanda $x_c(t) = y_{bp}(t) = 2\,\mathrm{Re}[y_{\ell p}(t)e^{j\omega_c t}]$ para obtener

$$x_c(t) = \tfrac{1}{2}A_c[x(t) \cos \omega_c t \mp \hat{x}(t) \operatorname{sen} \omega_c t] \qquad [4]$$

Éste es nuestro resultado deseado para la señal SSB en función de un mensaje arbitrario $x(t)$.

Un examen más detallado revela que la ecuación (4) tiene la forma de una expresión de portadora en cuadratura. Por tanto, las componentes en fase y en cuadratura son

$$x_{ci}(t) = \tfrac{1}{2}A_c x(t) \qquad x_{cq}(t) = \pm\tfrac{1}{2}A_c \hat{x}(t)$$

mientras que la envolvente SSB es

$$A(t) = \tfrac{1}{2}A_c\sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \qquad [5]$$

La complejidad de las ecuaciones (4) y (5) dificulta la tarea de dibujar las señales SSB o de determinar la potencia pico de la envolvente. Más bien, debemos inferir las propiedades en el dominio del tiempo a partir de casos simplificados, como la modulación de tono o la modulación de pulsos.

EJEMPLO 4.4-1 **SSB con modulación de pulsos**

Siempre que la señal moduladora de SSB tenga transiciones abruptas, la transformada de Hilbert $\hat{x}(t)$ contendrá picos agudos. Estos picos aparecen entonces en la envolvente $A(t)$, dando lugar al efecto conocido como *cuernos* de la envolvente. Para demostrar este efecto, se toma el pulso rectangular $x(t) = u(t) - u(t - \tau)$ de modo que se pueda usar la $\hat{x}(t)$ hallada en el ejemplo 3.5-2. La envolvente de SSB resultante graficada en la figura 4.4-3 exhibe picos infinitos en $t = 0$ y $t = \tau$, los instantes cuando $x(t)$ tiene las discontinuidades del escalón. Resulta claro que un transmisor no podría

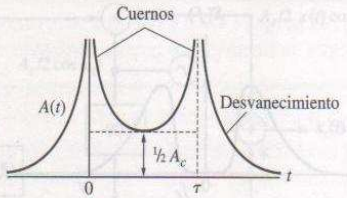


Figura 4.4-3 Envolvente de SSB con modulación de pulsos.

manejar la potencia pico de la envolvente necesaria para estos cuernos infinitos. Obsérvese también el *desvanecimiento* en $A(t)$ antes y después de cada pico.

Se concluye entonces que

> La SSB no es apropiada para la transmisión de pulsos, datos digitales o aplicaciones similares, y que señales moduladoras más apropiadas (tales como señales de audio) tienen que filtrarse por un pasabajas antes de la modulación para suavizar cualesquiera transiciones abruptas que pudieran producir cuernos excesivos o desvanecimiento.

EJERCICIO 4.4-1

Demuéstrese que las ecuaciones (4) y (5) concuerdan con la ecuación (2) cuando $x(t) = A_m \cos \omega_m t$ de modo que $\hat{x}(t) = A_m \operatorname{sen} \omega_m t$.

Generación de SSB

Nuestro concepto de sistema de generación SSB (figura 4.4-1*a*) requiere de las funciones de filtros ideales en la figura 4.4-2. Pero un corte perfecto en $f = f_c$ no puede ser materializado, de modo que un filtro de banda lateral real dejará pasar una porción de la banda lateral no deseada o atenuará una porción de la banda lateral deseada (hacer ambas cosas es equivalente a modulación de banda lateral residual). Afortunadamente, muchas señales moduladoras de interés práctico tienen poco o ningún contenido de bajas frecuencias; sus espectros tienen "huecos" en frecuencia cero como se muestra en la figura 4.4-4*a*. Estos espectros son típicos de señales de audio (voz o música), por ejemplo. Después de la traslación por el modulador balanceado, el hueco a la frecuencia cero aparece como un espacio vacío centrado alrededor de la frecuencia portadora, en el cual se puede acomodar la región de transición de un filtro de banda lateral práctico. La figura 4.4-4*b* ilustra este punto.

Como regla empírica, el ancho 2β de la región de transición no puede ser mucho menor que 1 por ciento de la frecuencia de corte nominal, lo cual impone el límite $f_c < 200\beta$. Puesto que 2β está restringida por el ancho del hueco espectral y f_{co} debe ser igual a f_c, podría no obtenerse una frecuencia portadora lo suficientemente alta con un espectro de mensaje dado. Para estos casos se podría realizar el proceso de modulación en dos (o más) etapas usando el sistema en la figura 4.4-5 (véase problema 4.4-5).

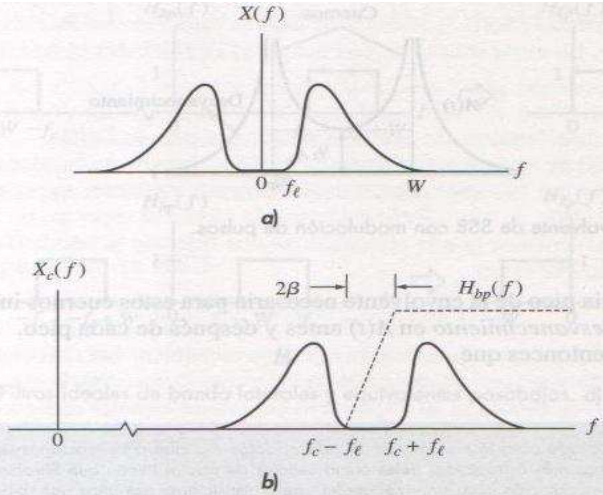


Figura 4.4-4 *a*) Espectro del mensaje con hueco en la frecuencia cero; *b*) filtro de banda lateral práctico.

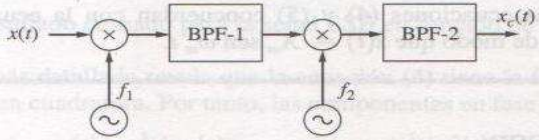


Figura 4.4-5 Generación de SSB en dos etapas.

Otro método de generación de SSB se basa en la ecuación (4) en la forma

$$x_c(t) = \frac{A_c}{2} x(t) \cos \omega_c t \pm \frac{A_c}{2} \hat{x}(t) \cos (\omega_c t - 90°) \qquad [6]$$

Esta expresión sugiere que una señal de SSB está conformada por *dos* señales de DSB con portadoras en cuadratura y señales moduladoras $x(t)$ y $\hat{x}(t)$. La figura 4.4-6 ilustra un sistema que realiza la ecuación (6) y produce ya sea USSB o bien LSSB, dependiendo de la señal en el sumador. Este sistema, conocido como **método de desplazamiento de fase**, elimina la necesidad de filtros de bandas laterales. En su lugar, las bandas laterales DSB tienen fases tales que se cancelan en un lado de f_c y se suman en el otro lado para crear una salida de una sola banda lateral.

Sin embargo, el desplazador de fase en cuadratura $H_Q(f)$ es, a su vez, una red irrealizable que sólo puede ser aproximada, usualmente con la ayuda de redes de fase adicionales pero idénticas en ambas ramas de la figura 4.4-6. Imperfecciones en la aproxi-

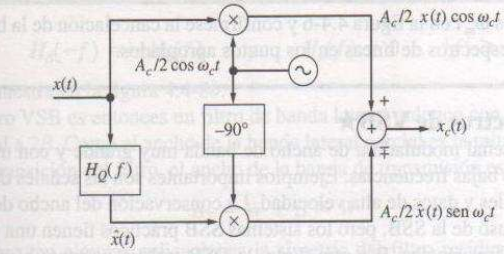


Figura 4.4-6 Método de desplazamiento de fase para la generación de SSB.

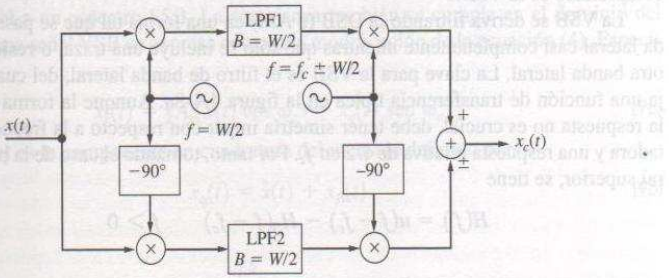


Figura 4.4-7 Modulador SSB de Weaver.

mación generalmente producen distorsión de la señal a bajas frecuencias y el sistema de desplazamiento de fase trabaja mejor con espectros de mensajes del tipo en la figura 4.4-4*a*. Un tercer método para la generación de SSB que evita ambos filtros laterales y desplazadores de fase se considera en el ejemplo 4.4-2.

EJEMPLO 4.4-2

Modulador SSB de Weaver

Considérese el modulador en la figura 4.4-7 tomando $x(t) = \cos 2\pi f_m t$ con $f_m < W$. Entonces $x_c(t) = v_1 \pm v_2$, donde v_1 es la señal de la parte superior del lazo y v_2 es la de la parte inferior. Tomando éstas por separado, la entrada al LPF superior es $\cos 2\pi f_m t \cos 2\pi \frac{W}{2} t$. La salida del LPF1 se multiplica por $\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2})t$, resultando en $v_1 = \frac{1}{4}[\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t + \cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} + \frac{W}{2} - f_m)t]$. La entrada al LPF inferior es $\cos 2\pi f_m t \,\text{sen}\, 2\pi \frac{W}{2} t$. La salida de LPF2 se multiplica por $\text{sen}\, 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2})t$, cuyo resultado es $v_2 = \frac{1}{4}[\cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t - \cos 2\pi(f_c \pm \frac{W}{2} + \frac{W}{2} - f_m)t]$. Tomando los signos superiores, $x_c(t) = 2 \times \frac{1}{4}\cos 2\pi(f_c + \frac{W}{2} - \frac{W}{2} + f_m)t = \frac{1}{2}\cos(\omega_c + \omega_m)t$, que corresponde a la USSB. De manera semejante, se obtiene la LSSB tomando los signos inferiores, resultando en $x_c(t) = \frac{1}{2}\cos(\omega_c - \omega_m)t$.

EJERCICIO 4.4-2 Tómese $x(t) = \cos \omega_m t$ en la figura 4.4-6 y confírmese la cancelación de la banda lateral dibujando los espectros de líneas en los puntos apropiados.

Señales y espectros de VSB★

Considérese una señal moduladora de ancho de banda muy grande y con un contenido significativo de bajas frecuencias. Ejemplos importantes son las señales de video en televisión, facsímiles y datos de alta velocidad. La conservación del ancho de banda es una razón para el uso de la SSB, pero los sistemas SSB prácticos tienen una pobre respuesta para bajas frecuencias. Por otra parte, la DSB trabaja bastante bien para frecuencias bajas del mensaje, pero el ancho de banda de transmisión es el doble del de la SSB. Como salta a la vista, se desea un esquema de modulación comprometido; el compromiso es la VSB.

La VSB se deriva filtrando la DSB (o AM) en una forma tal que se pasa una banda lateral casi completamente mientras que sólo se incluye una traza, o **residuo**, de la otra banda lateral. La clave para la VSB es el filtro de banda lateral, del cual se dibuja una función de transferencia típica en la figura 4.4-8*a*. Aunque la forma exacta de la respuesta no es crucial, debe tener simetría impar con respecto a la frecuencia portadora y una respuesta relativa de 1/2 en f_c. Por tanto, tomando el caso de la banda lateral superior, se tiene

$$H(f) = u(f - f_c) - H_\beta(f - f_c) \qquad f > 0 \qquad \textbf{[7a]}$$

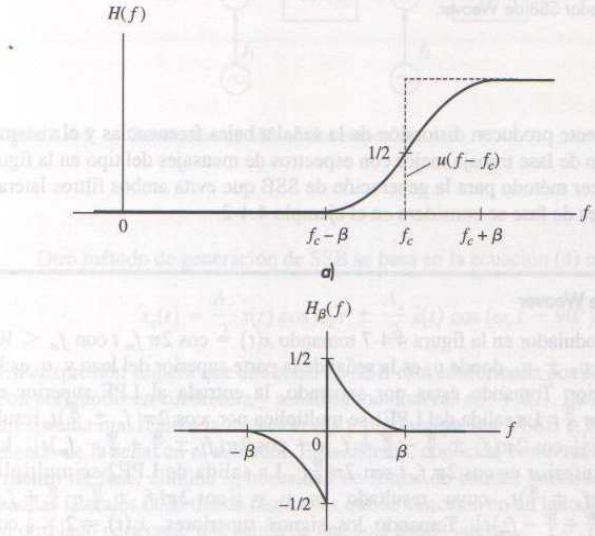


Figura 4.4-8 Características del filtro VSB.

donde

$$H_\beta(-f) = -H_\beta(f) \quad \text{y} \quad H_\beta(f) = 0 \quad |f| > \beta \tag{7b}$$

como se muestra en la figura 4.4-8*b*.

El filtro VSB es entonces un filtro de banda lateral práctico con un ancho de transición igual a 2β. Como el ancho de la banda lateral parcial es la mitad del ancho de la banda de transición del filtro, el ancho de la banda de transmisión es

$$B_T = W + \beta \approx W \tag{8}$$

Sin embargo, en algunas aplicaciones la simetría del filtro residual se logra básicamente en el receptor, de modo que el ancho de la banda de transmisión debe ser ligeramente mayor que $W + \beta$.

Cuando $\beta \ll W$, lo cual es con frecuencia cierto, el espectro VSB es esencialmente igual a un espectro SSB. La semejanza también se cumple en el dominio del tiempo y una señal VSB se expresa como una modificación de la ecuación (4). Específicamente,

$$x_c(t) = \tfrac{1}{2}A_c[x(t)\cos\omega_c t - x_q(t)\,\text{sen}\,\omega_c t] \tag{9a}$$

donde $x_q(t)$ es la componente en cuadratura del mensaje definido por

$$x_q(t) = \hat{x}(t) + x_\beta(t) \tag{9b}$$

con

$$x_\beta(t) = j2\int_{-\beta}^{\beta} H_\beta(f)X(f)e^{j\omega t}\,df \tag{9c}$$

Si $\beta \ll W$, la VSB se aproxima a la SSB y $x_\beta(t) \approx 0$; por el contrario, para β grande, la VSB se aproxima a la DSB y $\hat{x}(t) + x_\beta(t) \approx 0$. No es fácil determinar exactamente la potencia transmitida S_T, pero está acotada por

$$\tfrac{1}{4}A_c^2S_x \le S_T \le \tfrac{1}{2}A_c^2S_x \tag{10}$$

dependiendo del ancho del residuo β.

Finalmente, asúmase que una onda de AM se aplica a un filtro de banda lateral residual. Este esquema de modulación, denominado VSB más la portadora (VSB + C), se usa para la transmisión de video en televisión. La portadora no suprimida permite la *detección de envolvente*, igual que en AM, y retiene al mismo tiempo la conservación del ancho de banda de la banda lateral suprimida. La modulación de envolvente sin distorsión en realidad requiere de bandas laterales simétricas, pero la VSB + C puede proporcionar una buena aproximación.

Para analizar la envolvente de la VSB + C, se incorpora un término de portadora y un índice de modulación μ en la ecuación (9), la cual se convierte en

$$x_c(t) = A_c\{[1 + \mu x(t)]\cos\omega_c t - \mu x_q(t)\,\text{sen}\,\omega_c t\} \tag{11}$$

Las componentes en fase y en cuadratura son entonces

$$x_{ci}(t) = A_c[1 + \mu x(t)] \qquad x_{cq}(t) = A_c\mu x_q(t)$$

de modo que la envolvente es $A(t) = [x_{ci}^2(t) + x_{cq}^2(t)]^{1/2}$ o

$$A(t) = A_c[1 + \mu x(t)]\left\{1 + \left[\frac{\mu x_q(t)}{1 + \mu x(t)}\right]^2\right\}^{1/2} \tag{12}$$

Por tanto, si μ no es demasiado grande y β no es demasiado pequeña, entonces $|\mu x_q(t)| \ll 1$ y

$$A(t) \approx A_c[1 + \mu x(t)]$$

como se desea. Se necesitan estudios empíricos con señales típicas para determinar valores de μ y β que proporcionen un compromiso adecuado entre los requerimientos que entran en conflicto de la modulación de envolvente sin distorsión, la eficiencia de potencia y la conservación del ancho de banda.

4.5 CONVERSIÓN DE FRECUENCIA Y DEMODULACIÓN

La modulación lineal de OC —ya sea AM, DSB, SSB o VSB— produce la traslación hacia arriba del espectro del mensaje. Así que la **demodulación** implica la *traslación de frecuencias hacia abajo* para recuperar el mensaje a partir de la onda modulada. Los demoduladores que realizan esta operación se clasifican en dos grandes categorías: **detectores síncronos** y **detectores de envolvente**.

La traslación de frecuencia, o **conversión**, también se usa para desplazar una señal modulada hacia una nueva frecuencia portadora (superior o inferior) a fin de amplificarla o procesarla. Por ello, la traslación es un concepto fundamental en los sistemas de modulación lineal e incluye la modulación y la detección como casos especiales. Antes de examinar detectores, se estudiará brevemente el proceso general de conversión de frecuencias.

Conversión de frecuencia

La conversión de frecuencia comienza con la multiplicación por una senoide. Considere, por ejemplo, la onda de DSB $x(t)\cos\omega_1 t$. Multiplicando por $\cos\omega_2 t$, se obtiene

$$x(t)\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t = \tfrac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \tfrac{1}{2}x(t)\cos(\omega_1 - \omega_2)t \tag{1}$$

El producto está conformado por la *suma* y *diferencia de frecuencias*, $f_1 + f_2$ y $|f_1 - f_2|$, cada una modulada por $x(t)$. Para mayor claridad se escribe $|f_1 - f_2|$ ya que $\cos(\omega_2 - \omega_1)t = \cos(\omega_1 - \omega_2)t$. Considerando que $f_2 \neq f_1$, la multiplicación ha trasladado los espectros de la señal a dos nuevas frecuencias portadoras. Con un filtrado apropiado, la señal se convierte o traslada hacia arriba o hacia abajo. Los dispositivos que ejecutan esta operación se denominan **convertidores de frecuencia** o **mezcladores**. La operación misma se denomina **heterodinaje** o **mezclado**.

La figura 4.5-1 ilustra las componentes esenciales de un convertidor de frecuencia. La implementación del multiplicador sigue el mismo proceso que el de los circuitos moduladores discutidos en la Sec. 4.3. Algunas aplicaciones del convertidor incluyen osciladores de frecuencia heterodina, divisores de frecuencia regeneradores, codificadores de voz y analizadores de espectros, además de su función en transmisores y receptores.

EJEMPLO 4.5-1

La figura 4.5-2 representa un **transpondedor** simplificado en un relevo satelital que proporciona comunicación de dos vías entre dos estaciones terrenas. Se usan frecuen-

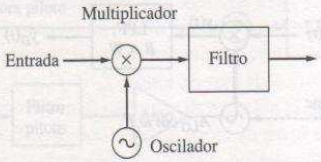


Figura 4.5-1 Convertidor de frecuencia.

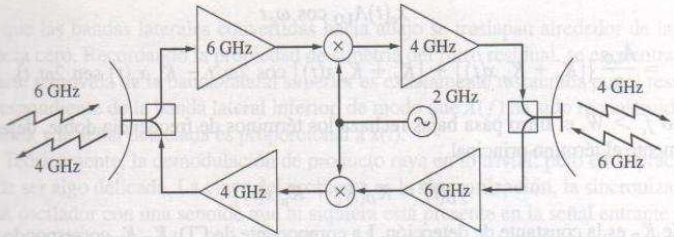


Figura 4.5-2 Transpondedor satelital con conversión de frecuencia.

cias portadoras diferentes de 6 GHz y 4 GHz en los enlaces ascendente y descendente para prevenir autooscilaciones debidas a la realimentación positiva desde el lado transmisor al lado receptor. Un convertidor de frecuencias traslada el espectro de la señal amplificada en el enlace ascendente hasta la banda de paso del amplificador de enlace descendente.

EJERCICIO 4.5-1

Dibuje el espectro de la ecuación (1) para $f_2 < f_1 f_2 = f_1$ y $f_2 > f_1$, tomando $X(f)$ como en la figura 4.1-1.

Detección síncrona

Todos los tipos de modulación lineal se detectan mediante el demodulador de *producto* de la figura 4.5-3. La señal entrante se multiplica primero por una senoide generada localmente y después se filtra con un pasa bajas; el ancho de banda del filtro es el mismo que el ancho de banda del mensaje W o algo mayor. Se asume que el oscilador local (OL) está *sincronizado exactamente* con la portadora tanto en fase como en frecuencia, lo cual explica el nombre de **detección síncrona** o **coherente**.

Para el análisis, se escribe la señal de entrada en la forma generalizada

$$x_c(t) = [K_c + K_\mu x(t)] \cos \omega_c t - K_\mu x_q(t) \operatorname{sen} \omega_c t \qquad [2]$$

que representa cualquier tipo de modulación lineal con una identificación apropiada de K_c, K_μ y $x_q(t)$, por ejemplo, tomando $K_c = 0$ para portadora suprimida, $x_q(t) = 0$ para doble banda lateral y así sucesivamente. La entrada al filtro es entones el producto

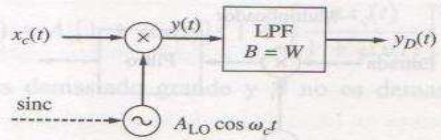


Figura 4.5-3 Detección síncrona del producto.

$$x_c(t) A_{LO} \cos \omega_c t$$

$$= \frac{A_{LO}}{2} \{[K_c + K_\mu x(t)] + [K_c + K_\mu x(t)] \cos 2\omega_c t - K_\mu x_q(t) \operatorname{sen} 2\omega_c t\}$$

Como $f_c > W$, el filtro pasa bajas rechaza los términos de frecuencia doble, dejando solamente el término principal

$$y_D(t) = K_D[K_c + K_\mu x(t)] \qquad [3]$$

donde K_D es la constante de detección. La componente de CD, $K_D K_c$ corresponde a la portadora trasladada si está presente en la onda modulada. Ésta puede removerse de la salida mediante un capacitor de bloqueo o un transformador; lo que también remueve cualquier término de CD en $x(t)$. Con esta objeción menor es posible decir que el mensaje se ha recuperado completamente a partir de $x_c(t)$.

Aunque perfectamente correctas, las manipulaciones anteriores fallan al exponer lo que sucede en la demodulación de la VSB. Esto se ve mejor en el dominio de la frecuencia con el espectro del mensaje considerado constante en W (figura 4.5-4*a*) de modo que el espectro modulado toma la forma de la figura 4.5-4*b*. El espectro trasladado hacia abajo en la entrada del filtro será entonces como se muestra en la figura 4.5-4*c*. De nuevo, los términos de alta frecuencia se eliminan mediante filtrado, mien-

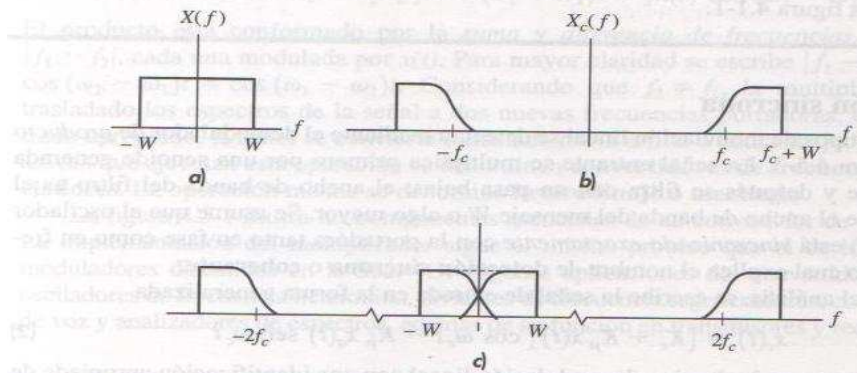


Figura 4.5-4 Espectros VSB. *a)* Mensaje; *b)* señal modulada; *c)* señal trasladada en frecuencia antes de filtrado pasa bajas.

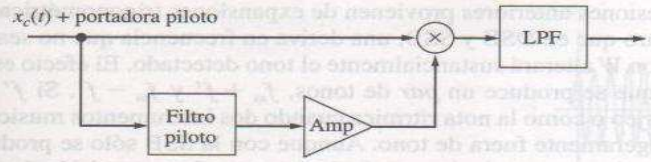


Figura 4.5-5 Detección homodina.

mas que las bandas laterales convertidas hacia abajo se traslapan alrededor de la frecuencia cero. Recordando la propiedad de simetría del filtro residual, se encuentra que la parte removida de la banda lateral superior es exactamente restaurada por el residuo correspondiente de la banda lateral inferior, de modo que $X(f)$ ha sido reconstruida en la salida y la señal detectada es proporcional a $x(t)$.

Teóricamente, la demodulación de producto raya en lo trivial; pero en la práctica, puede ser algo delicada. La clave del problema es la **sincronización**, la sincronización de un oscilador con una senoide que ni siquiera está presente en la señal entrante si la portadora está suprimida. Para simplificar el problema, los sistemas de portadora suprimida pueden tener una pequeña cantidad de portadora reinsertada en $x_c(t)$ en el transmisor. Esta **portadora piloto** es captada en el receptor mediante un filtro de pasa banda angosta, amplificada y usada en lugar de un OL. El sistema, mostrado en la figura 4.5-5, se llama **detección homodina** (en realidad, la portadora piloto amplificada con más frecuencia sirve para sincronizar un oscilador separado en vez de usarse directamente).

Desde luego, son posibles otras técnicas para sincronización, incluyendo los **lazos de sincronización de fase** (se estudiarán en la Sec. 7.3) o el uso de osciladores controlados por cristal de alta estabilidad en el transmisor y el receptor. No obstante, se debe esperar algún grado de falta de sincronia en los detectores síncronos. Por tanto, es importante investigar los efectos de la deriva en fase y frecuencia en diferentes aplicaciones. Esto se hará para la DSB y SSB en términos de la modulación de tono.

Asúmase que la señal del oscilador local es $\cos(\omega_c t + \omega' t + \phi')$, donde ω' y ϕ' representan errores de frecuencia y fase que derivan lentamente comparados con la portadora. Para doble banda lateral con modulación de tono, la señal detectada se convierte en

$$y_D(t) = K_D \cos \omega_m t \cos(\omega' t + \phi') \qquad [4]$$

$$= \begin{cases} \frac{K_D}{2}[\cos(\omega_m + \omega')t + \cos(\omega_m - \omega')t] & \phi' = 0 \\ K_D \cos \omega_m t \cos \phi' & \omega' = 0 \end{cases}$$

De manera similar, para la banda lateral única con $x_c(t) = \cos(\omega_c \pm \omega_m)t$, se obtiene

$$y_D(t) = K_D \cos[\omega_m t \mp (\omega' t + \phi')] \qquad [5]$$

$$= \begin{cases} K_D \cos(\omega_m \mp \omega')t & \phi' = 0 \\ K_D \cos(\omega_m t \mp \phi') & \omega' = 0 \end{cases}$$

Todas las expresiones anteriores provienen de expansiones trigonométricas sencillas.

Resulta claro que en DSB y SSB, una deriva en frecuencia que no sea pequeña en comparación con W alterará sustancialmente el tono detectado. El efecto es más severo en la DSB ya que se produce un *par* de tonos, $f_m + f'$ y $f_m - f'$. Si $f' \ll f_m$, esto suena como gorjeo o como la nota rítrmica cuando dos instrumentos musicales tocan al unísono pero ligeramente fuera de tono. Aunque con la SSB sólo se produce un tono, esto también puede ser perturbador, particularmente en la transmisión de música. Para ilustrar, el acorde de la tríada mayor consta de tres notas cuyas frecuencias están relacionadas como los enteros 4, 5 y 6. Errores en la detección de frecuencia desplazan cada nota en la misma cantidad absoluta, destruyendo la relación armónica y dándole a la música un sabor oriental (obsérvese que el efecto no es como tocar música grabada a la velocidad equivocada, lo cual preserva las relaciones de frecuencia). Para la transmisión de voz, las pruebas con oyentes han demostrado que derivas en frecuencia menores que ± 10 Hz son tolerables; de no ser así, todo el mundo sonaría como el Pato Donald.

En lo que respecta a la deriva en la fase, una vez más la DSB es más sensible, ya que si $\phi' = \pm 90°$ (OL y portadora en cuadratura), la señal detectada desaparece completamente. Con ϕ', variando lentamente, se obtiene un efecto de **desvanecimiento** aparente. La deriva de la fase en SSB se parece a una **distorsión de retardo**, y el caso extremo ocurre cuando $\phi' = \pm 90°$ y la señal demodulada se convierte en $\hat{x}(t)$. Sin embargo, como ya se señaló, el oído humano puede tolerar una distorsión por retardo considerable, de modo que la deriva de fase no es tan seria en los sistemas SSB de señales de voz.

Para resumir,

> Los requerimientos de sincronización de fase y de frecuencia son más bien modestos para la transmisión de voz vía SSB. Pero en datos, facsímiles y sistemas de video con portadora suprimida, la sincronización cuidadosa es una necesidad. En consecuencia, la radiodifusión de televisión emplea VSB + C en lugar de VSB con portadora suprimida.

Detección de envolvente

Muy poco se dijo en la Sec. 4.5 sobre la demodulación síncrona de AM por la sencilla razón de que casi nunca se usa. Es cierto que los detectores síncronos trabajan para AM, pero también lo hace un **detector de envolvente**, el cual es mucho más sencillo. Como la envolvente de una onda AM tiene la misma forma que el mensaje, independientemente de la frecuencia y fase de la portadora, se puede lograr la demodulación extrayendo la envolvente sin preocuparse de la sincronización.

En la figura 4.5-6 se muestran un detector de envolvente simplificado y sus formas de ondas; se asume que el diodo es lineal por tramos. En ausencia de circuitería adicional, el voltaje v sería justamente la versión semirrectificada de la entrada v_{in}. Pero R_1C_1 actúa como un filtro pasa bajas, respondiendo solamente a variaciones en los picos de v_{in} siempre que

$$W \ll \frac{1}{R_1 C_1} \ll f_c \qquad [6]$$

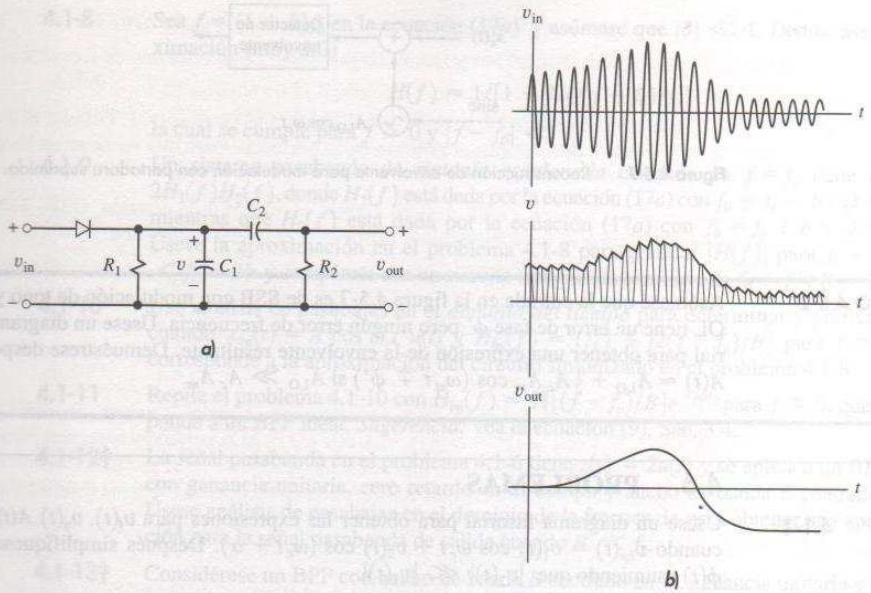


Figura 4.5-6 Detección de envolvente. *a)* Circuito; *b)* formas de ondas.

Por ello, como se señaló anteriormente, necesitamos que $f_c \gg W$ de modo que la envolvente esté claramente definida. En estas condiciones, C_1 se descarga sólo ligeramente entre los picos de la portadora y v se aproxima a la envolvente de v_{in}. Un filtrado más sofisticado produce mejoras adicionales si es necesario. Finalmente, R_2C_2 actúa como un bloqueo de CD para remover la polarización de la componente de portadora no modulada. Puesto que el bloqueo de CD distorsiona las componentes de baja frecuencia del mensaje, los detectores de envolvente convencionales no son adecuados para señales con un contenido importante de bajas frecuencias.

El voltaje v también puede filtrarse para remover las variaciones de la *envolvente* y producir un voltaje CD proporcional a la amplitud de la portadora. Este voltaje a su vez es realimentado a etapas anteriores del receptor para el **control automático de volumen** (AVC) y compensar el desvanecimiento. A pesar del elemento no lineal, la figura 4.5-6 se denomina **detector de envolvente lineal**. la salida es linealmente proporcional a la envolvente de entrada. También se pueden usar diodos con ley de potencias, pero entonces v incluiría términos de la forma v_{in}^2, v_{in}^3, etc., y podría haber distorsión de la segunda armónica apreciable a menos que $\mu \ll 1$.

Algunos demoduladores de DSB y de SSB emplean el método de **reconstrucción de envolvente** mostrado en la figura 4.5-7. La adición a la señal entrante de una portadora grande generada localmente reconstruye la envolvente para su recuperación mediante un detector de envolvente. Este método elimina la multiplicación de la señal pero no elimina el problema de la sincronización, porque la portadora local debe estar también sincronizada como el LO en un demodulador de producto.

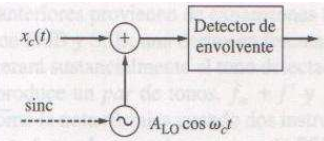


Figura 4.5-7 Reconstrucción de envolvente para modulación con portadora suprimida.

EJERCICIO 4.5-2 Asúmase que la entrada en la figura 4.5-7 es de SSB con modulación de tono y que el OL tiene un error de fase ϕ' pero ningún error de frecuencia. Úsese un diagrama fasorial para obtener una expresión de la envolvente resultante. Demuéstrese después que $A(t) \approx A_{LO} + \frac{1}{2}A_c A_m \cos(\omega_m t \mp \phi')$ si $A_{LO} \gg A_c A_m$.

4.6 PROBLEMAS

4.1-1 Úsese un diagrama fasorial para obtener las expresiones para $v_i(t)$, $v_q(t)$ $A(t)$ y $\phi(t)$ cuando $v_{bp}(t) = v_1(t)\cos\omega_c t + v_2(t)\cos(\omega_c t + \alpha)$. Después simplifíquese $A(t)$ y $\phi(t)$ asumiendo que $|v_2(t)| \ll |v_1(t)|$.

4.1-2 Repítase el problema 4.1-1 con $v_{bp}(t) = v_1(t)\cos(\omega_c - \omega_0)t + v_2(t)\cos(\omega_c + \omega_0)t$.

4.1-3 Sean $v_i(t)$ y $v_q(t)$ en la ecuación (7) señales pasabajas con energías E_i y E_q, respectivamente, y ancho de banda $W < f_c$. *a)* Use la ecuación (17), Sec. 2.2, para demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{bp}(t)dt = 0$$

b) Demuéstrese ahora que la energía de la señal pasabanda es igual a $(E_i + E_q)/2$.

4.1-4* Determine $v_{\ell p}(t)$, $v_i(t)$ y $v_q(t)$ cuando $f_c = 1200$ Hz y

$$V_{bp}(f) = \begin{cases} 1 & 900 \le |f| < 1300 \\ 0 & \text{otros valores de } f \end{cases}$$

4.1-5 Repítase el problema 4.1-4 con

$$V_{bp}(f) = \begin{cases} 1 & 1100 \le |f| < 1200 \\ 1/2 & 1200 \le |f| < 1350 \\ 0 & \text{otros valores de } f \end{cases}$$

4.1-6 Sea $v_{bp}(t) = 2z(t)\cos[(\omega_c \pm \omega_0)t + \alpha]$. Determínese $v_i(t)$ y $v_q(t)$ para obtener

$$v_{\ell p}(t) = z(t)\exp j(\pm\omega_0 t + \alpha)$$

4.1-7 Deduzca la ecuación (17*b*) obteniendo expresiones para f_ℓ y f_u a partir de la ecuación (17*a*).

4.1-8 Sea $f = (1 + \delta)f_0$ en la ecuación (17*a*) y asúmase que $|\delta| \ll 1$. Dedúzcase la aproximación (muy útil)

$$H(f) \approx 1/[1 + j2Q(f - f_0)/f_0]$$

la cual se cumple para $f > 0$ y $|f - f_0| \ll f_0$.

4.1-9 Un sistema pasabanda de *sintonía escalonada* centrado en $f = f_c$ tiene $H(f) = 2H_1(f)H_2(f)$, donde $H_1(f)$ está dada por la ecuación (17*a*) con $f_0 = f_c - b$ y $Q = f_0/2b$, mientras que $H_2(f)$ está dada por la ecuación (17*a*) con $f_0 = f_c + b$ y $Q = f_0/2b$. Úsese la aproximación en el problema 4.1-8 para graficar $|H(f)|$ para $f_c - 2b < f < f_c + 2b$ y compárese con un circuito sintonizado sencillo con $f_0 = f_c$ y $B = 2b\sqrt{2b}$.

4.1-10* Use análisis de pasabajas en el *dominio del tiempo* para determinar y graficar $y_{bp}(t)$ cuando $x_{bp}(t) = A \cos \omega_c t\ u(t)$ y $H_{bp}(f) = 1/[1 + j2(f - f_c)/B]$ para $f > 0$, que corresponde a la aproximación del circuito sintonizado en el problema 4.1-8.

4.1-11 Repita el problema 4.1-10 con $H_{bp}(f) = \Pi[(f - f_c)/B]e^{-j\omega t_d}$ para $f > 0$, que corresponde a un BPF ideal. *Sugerencia:* vea la ecuación (9), Sec. 3.4.

4.1-12‡ La señal pasabanda en el problema 4.1-6 tiene $z(t) = 2u(t)$ y se aplica a un BPF ideal con ganancia unitaria, cero retardo en el tiempo y ancho de banda B centrado en f_c. Úsese análisis de pasabajas en el dominio de la frecuencia para obtener una aproximación para la señal pasabanda de salida cuando $B \ll f_0$.

4.1-13‡ Considérese un BPF con ancho de banda B centrado en f_c, ganancia unitaria y desplazamiento de fase parabólico $\theta(f) = (f - f_c)^2/b$ para $f > 0$. Obténgase una aproximación de portadora en cuadratura para la señal de salida cuando $|b| \gg (B/2)^2$ y $x_{bp}(t) = z(t) \cos \omega_c t$, donde $z(t)$ tiene un espectro pasabajas limitado en banda con $W \leq \frac{B}{2}$.

4.2-1 Sea $x(t) = \cos 2\pi f_m t\ u(t)$ con $f_m \ll f_c$. Grafíquese $x_c(t)$ e indíquese la envolvente cuando la modulación es AM con $\mu < 1$, AM con $\mu > 1$, y DSB. Señalar las situaciones donde ocurren inversiones de fase.

4.2-2 Repita el problema 4.2-1 con $x(t) = 0.5u(t) - 1.5u(t - T)$ con $T \gg 1/f_c$.

4.2-3* Si $x(t) = \cos 200\pi t$, determinar B_T y S_T para la señal modulada AM asumiendo que $A_c = 10$ y $\mu = 0.6$. Repítase para transmisión en DSB.

4.2-4 Se va a transmitir la señal $x(t) = \text{sinc}^2\ 40t$ usando AM con $\mu < 1$. Dibujar el espectro bilateral de $x_c(t)$ y determinar B_T.

4.2-5 Calcúlese la potencia transmitida de una onda de AM con 100 por ciento de modulación de tono y potencia pico de la envolvente de 32 kW.

4.2-6 Considerar un transmisor de radio con capacidad de 4 kW de potencia pico de la envolvente. Determínese el valor máximo permisible de μ para AM con modulación de tono y $S_T = 1$ kW.

4.2-7 La señal moduladora multitonal $x(t) = 3K(\cos 8\pi t + 2 \cos 20\pi t)$ es la entrada a un transmisor de AM con $\mu = 1$ y $f_c = 1000$. Determinar K de modo que $x(t)$ esté normalizada apropiadamente. Dibújese el espectro de líneas para frecuencias positivas de la onda modulada y calcúlese la cota superior de $2P_{sb}/S_T$.

4.2-8 Repítase el problema 4.2-7 con $x(t) = 2K(\cos 8\pi t + 1) \cos 20\pi t$.

4.2-9* La señal $x(t) = 4 \text{ sen } \frac{\pi}{2}t$ es transmitida por DSB. ¿Qué intervalo de frecuencias portadoras puede usarse?

4.2-10 La señal en el problema 4.2-9 es transmitida por AM con $\mu = 1$. Dibujar el diagrama fasorial. ¿Cuál es la amplitud mínima de la portadora para que no ocurran inversiones de fase?

4.2-11 La señal $x(t) = \cos 2\pi 40t + \frac{1}{2} \cos 2\pi 90t$ es transmitida usando DSB. Dibujar el espectro de líneas para frecuencias positivas y el diagrama fasorial.

4.3-1 La señal $x(t) = \frac{1}{2} \cos 2\pi 70t + \frac{1}{3} \cos 2\pi 120t$ es la entrada al sistema modulador de ley cuadrática dado en la figura 4.3-3*a* con una frecuencia portadora de 10 kHz. Asuma que $v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2$. *a*) Dar la frecuencia central y el ancho de banda del filtro para que este sistema produzca una señal de AM estándar. *b*) Determínense los valores de a_1 y a_2 de modo que $A_c = 10$ y $\mu = \frac{1}{2}$.

4.3-2* Un sistema de modulación con elementos no lineales produce la señal $x_c(t) = aK^2(v(t) + A \cos \omega_c t)^2 - b(v(t) - A \cos \omega_c t)^2$. Si la portadora tiene una frecuencia f_c y $v(t) = x(t)$, demuéstrese que una selección apropiada de K produce modulación DSB sin necesidad de filtrado. Dibujar un diagrama de bloques del sistema de modulación.

4.3-3 Determínese K y $v(t)$ de modo que el sistema de modulación del problema 4.3-2 produzca AM sin filtrado. Dibujar un diagrama de bloques del sistema de modulación.

4.3-4 Un modulador similar al de la figura 4.3-3*a* tiene un elemento no lineal de la forma $v_{out} = a_1 v_{in} + a_3 v_{in}^3$. Dibújese $V_{out}(f)$ para la señal de entrada en la figura 4.1-1. Determinar los parámetros del oscilador y el BPF para producir una señal de DSB con frecuencia portadora f_c.

4.3-5 Diseñar, en forma de diagrama de bloques, un modulador AM usando el elemento no lineal del problema 4.3-4 y un doblador de frecuencia. Identifíquense cuidadosamente todos los componentes e impóngase una condición sobre f_c en función de W para realizar este sistema.

4.3-6 Determinar la señal de salida en la figura 4.3-5 cuando los moduladores AM están **desbalanceados**, de manera que un elemento no lineal tenga $v_{out} = a_1 v_{in} + a_2 v_{in}^2 + a_3 v_{in}^3$, mientras que el otro tenga $v_{out} = b_1 v_{in} + b_2 v_{in}^2 + b_3 v_{in}^3$.

4.3-7* La señal $x(t) = 20\text{sinc}^2\ 400t$ es la entrada al modulador de anillo en la figura 4.3-6. Dibujar el espectro de v_{out} y determinar el intervalo de valores de f_c que puede usarse para transmitir esta señal.

4.4-1 Dedúzcase la ecuación (4) a partir de $y_{\ell p}(t)$.

4.4-2 Calcular la transformada de la ecuación (4) para obtener el espectro SSB

$$X_c(f) = \tfrac{1}{4}A_c\{[1 \pm \text{sgn}(f - f_c)]X(f - f_c) + [1 \mp \text{sgn}(f + f_c)]X(f + f_c)\}.$$

4.4-3 Confirmar que la expresión para $X_c(f)$ en el problema 4.4-2 concuerda con las figuras 4.4-1*b* y 4.4-1*c*.

4.4-4 Determinar la envolvente SSB cuando $x(t) = \cos \omega_m t + \frac{1}{9} \cos 3\omega_m t$, la cujal se aproxima a una onda triangular. Dibújese $A(t)$ tomando $A_c = 81$ y compárese con $x(t)$.

4.4-5 El sistema en la figura 4.4-5 produce USSB con $f_c = f_1 + f_2$ cuando la frecuencia de corte inferior del primer BPF es igual a f_1 y la frecuencia de corte inferior del segundo BPF es igual a f_2. Demuéstrese la operación del sistema tomando $X(f)$ como en la figura 4.4-4*a* y dibujar los espectros en puntos apropiados. ¿Cómo se debe modificar el sistema para producir LSSB?

4.4-6 Supóngase que el sistema en la figura 4.4-5 está diseñado para USSB como se describe en el problema 4.4-5. Asúmase que $x(t)$ es una señal de voz típica, de modo que $X(f)$ tiene contenido despreciable fuera de $200 < |f| < 3\,200$ Hz. Dibujar los espectros en puntos apropiados para determinar el máximo valor permitido de f_c cuando las regiones de transición de los BPF deben satisfacer la condición $2\beta \geq 0.01 f_{co}$.

4.4-7* La señal $x(t) = \cos 2\pi 100t + 3 \cos 2\pi 200t + 2 \cos 2\pi 400t$ es la entrada a un sistema de modulación de amplitud LSSB con una frecuencia portadora de 10 kHz. Dibujar el espectro bilateral de la señal transmitida. Determinar la potencia transmitida S_T y el ancho de banda B_T.

4.4-8 Dibujar el diagrama de bloques de un sistema que generaría la señal LSSB en el problema 4.4-7, dando valores exactos para las frecuencias de corte de filtro y de los osciladores. Asegurarse de que sus filtros cumplen la regla del ancho de banda fraccionario.

4.4-9 Supóngase que el desplazamiento de fase de la portadora en la figura 4.4-6 es realmente $-90° + \delta$, donde δ es un pequeño error angular. Obténganse las expresiones aproximadas para $x_c(t)$ y $A(t)$ en la salida.

4.4-10 Obténgase una expresión aproximada para $x_c(t)$ en la salida en la figura 4.4-6 cuando $x(t) = \cos \omega_m t$ y el desplazador de fase en cuadratura tiene $|H_Q(f_m)| = 1 - \epsilon$ y $\arg H_Q(f_m) = -90° + \delta$, donde ϵ y δ son errores pequeños. Escribir la respuesta como la suma de dos senoides.

4.4-11 La señal de tono $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ es la entrada a un modulador VSB + C. La señal resultante transmitida es

$$x_c(t) = A_c \cos 2\pi f_c t + \tfrac{1}{2} a A_m A_c \cos [2\pi(f_c + f_m)t] + \tfrac{1}{2}(1 - a) A_m A_c \cos [2\pi(f_c - f_m)t].$$

Dibujar el diagrama fasorial asumiendo que $a > \frac{1}{2}$. Determinar la componente en cuadratura $x_{cq}(t)$.

4.4-12* Obténgase una expresión para la VSB con modulación de tono tomando $f_m < \beta$ de modo que el filtro VSB tenga $H(f_c \pm f_m) = 0.5 \pm a$. Demuéstrese después que $x_c(t)$ se reduce a DSB cuando $a = 0$ o SSB cuando $a = \pm 0.5$.

4.4-13 Obténgase una expresión para VSB + C con modulación de tono tomando $f_m > \beta$. Construir el diagrama fasorial y determinar $A(t)$.

4.5-1 Dado un amplificador pasabanda centrado en 66 MHz, diseñar un transpondedor de televisión que reciba una señal en el Canal 11 (199.25 MHz) y la transmita en el Canal 4 (67.25 MHz). Usar un solo oscilador.

4.5-2 Repítase el problema 4.5-1 con la señal recibida en el Canal 44 (651.25 MHz) y la señal transmitida en el Canal 22 (519.25 MHz).

4.5-3 El sistema en la figura 4.4-5 se convierte en un *cifrador* cuando el primer BPF pasa solamente la banda lateral superior, la frecuencia del segundo oscilador es $f_2 = f_1 + W$, y el segundo BPF es remplazado por un LPF con $B = W$. Dibujar el espectro de salida tomando $X(f)$ como en la figura 4.4-4*a* y explicar por qué esta salida sería ininteligible cuando $x(t)$ es una señal de voz. ¿Cómo se puede descifrar la señal de salida?

4.5-4 Tomar $x_c(t)$ como en la ecuación (2) y determinar la salida de un detector síncrono cuyo oscilador local produce $2 \cos(\omega_c t + \phi)$, donde ϕ es un error de fase constante. Luego escribir respuestas separadas para AM, DSB, SSB y VSB mediante la sustitución apropiada de los parámetros de modulación.

4.5-5* La señal transmitida en el problema 4.4-11 es demodulada usando detección de envolvente. Asumiendo que $0 \leq a \leq 1$, ¿qué valores de a minimizan y maximizan la distorsión en la salida del detector de envolvente?

4.5-6 La señal $x(t) = 2 \cos 4\pi t$ es transmitida usando DSB. Dibujar la señal de salida si se usa detección de envolvente para la demodulación.

4.5-7 Supóngase que la forma de onda de DSB del problema 4.5-6 es demodulada usando un detector síncrono que tiene una onda cuadrada con una frecuencia fundamental de f_c como el oscilador local. ¿Demodulará apropiadamente el detector la señal? ¿Sucederá lo mismo si se sustituyen señales periódicas no cuadradas para el oscilador?

4.5-8 Dibújese una señal AM con rectificación de media onda modulada por tono con $\mu A_m = 1$ y $f_m = W$. Usar su dibujo para determinar los límites superior e inferior para la constante de tiempo $R_1 C_1$ del detector de envolvente en la figura 4.5-6. A partir de estos límites determinar el valor práctico mínimo de f_c/W.

capítulo

5

Modulación exponencial de OC

RESUMEN DEL CAPÍTULO

5.1 **Modulación de fase y de frecuencia**

Señales PM y FM. PM y FM de banda angosta Modulación de tono Modulación multitonal y periódica★

5.2 **Ancho de banda de transmisión y distorsión**

Estimados del ancho de banda de transmisión Distorsión lineal Distorsión no lineal y limitadores.

5.3 **Generación y detección de FM y PM**

FM directa y OCV Moduladores de fase y FM indirecta FM de onda triangular★ Detección de frecuencia

5.4 **Interferencia**

Senoidales interferentes Filtrado de desénfasis y preénfasis Efecto de captura en FM★

Al comienzo de este capítulo vale la pena insistir en dos propiedades de la modulación *lineal* OC: el espectro modulado es básicamente el espectro del mensaje trasladado, y el ancho de banda de transmisión nunca es mayor que el doble del ancho de banda del mensaje. Una tercera propiedad, que se deducirá en el capítulo 10, es que la relación señal-ruido $(S/N)_D$ no es mejor que en la transmisión en la banda base y se mejora con sólo aumentar la potencia transmitida. La modulación **exponencial** difiere en los tres casos.

En contraste con la modulación lineal, la modulación exponencial es un proceso *no lineal*; en consecuencia, no debe sorprender que el espectro modulado no esté relacionado en una forma sencilla con el espectro del mensaje. Además, resulta que el ancho de banda de transmisión es normalmente mucho mayor que el doble del ancho de banda del mensaje. Como compensación por este inconveniente está el hecho de que la modulación exponencial proporciona mayores relaciones señal-ruido sin aumentar la potencia transmitida. La modulación exponencial permite así *intercambiar ancho de banda por potencia* en el diseño de un sistema de comunicación.

El estudio de la modulación exponencial comienza con la definición de los dos tipos básicos: la **modulación de fase** (PM) y la **modulación de frecuencia** (FM). En este capítulo se examinarán las señales y los espectros; se investigarán el ancho de banda de transmisión y el problema de la distorsión, y, por último, se describirá la circuitería propia para la generación y la detección. El análisis de la interferencia al final del capítulo hace hincapié en el valor de la FM para la radiodifusión y establece el escenario para nuestra consideración del ruido en el capítulo 10.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, usted será capaz de hacer lo siguiente:

1. Hallar la fase y la frecuencia instantáneas de una señal con modulación exponencial (sección 5.1).
2. Construir el espectro de líneas y el diagrama fasorial para FM o PM con modulación de tono (sección 5.1).
3. Estimar el ancho de banda requerido para la transmisión de FM o PM (sección 5.2).
4. Identificar los efectos de la distorsión, la limitación y la multiplicación de frecuencias en una señal FM o PM (sección 5.2)
5. Diseñar un generador y detector de FM apropiado para una aplicación (sección 5.3).
6. Usar un diagrama fasorial para analizar la interferencia en AM, FM y PM (sección 5.4).

5.1 MODULACIÓN DE FASE Y DE FRECUENCIA

En esta sección se introducen los conceptos de fase y frecuencia instantáneas para la definición de señales PM y FM. Puesto que la naturaleza no lineal de la modulación impide el análisis espectral en términos generales, tendrá que trabajarse más bien con los espectros resultantes de casos particulares, por ejemplo: la modulación de banda angosta y la modulación de tono.

Señales PM y FM

Considérese una señal de OC con envolvente constante pero con fase variable en el tiempo, de manera que

$$x_c(t) = A_c \cos [\omega_c t + \phi(t)] \qquad [1]$$

al definir el **ángulo instantáneo total**

$$\theta_c(t) \triangleq \omega_c t + \phi(t)$$

se expresa $x_c(t)$ como

$$x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t) = A_c \operatorname{Re}\left[e^{j\theta_c(t)}\right]$$

Por tanto, si $\theta_c(t)$ contiene la información del mensaje $x(t)$, se tiene un proceso que puede denominarse modulación **angular** o bien modulación **exponencial**. Se usará el último nombre porque subraya la relación no lineal entre $x_c(t)$ y $x(t)$.

Por lo que se refiere a la dependencia específica de $\theta_c(t)$ de $x(t)$, la **modulación de fase** (PM) está definida por

$$\phi(t) \triangleq \phi_\Delta x(t) \qquad \phi_\Delta \leq 180^\circ \qquad [2]$$

de modo que

$$x_c(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \phi_\Delta x(t)\right] \qquad [3]$$

Estas ecuaciones establecen que la fase instantánea varía directamente con la señal moduladora. La constante ϕ_Δ representa el **desplazamiento de fase máximo** producido por $x(t)$, ya que todavía se mantiene la convención de normalización $|x(t)| \leq 1$. La cota superior $\phi_\Delta \leq 180^\circ$ (o π radianes) limita a $\phi(t)$ a la banda de $\pm 180^\circ$ y evita que haya ambigüedades de fase; después de todo, no hay distinción física entre ángulos de $+270$ y -90°, por ejemplo. La cota en ϕ_Δ es análoga a la restricción $\mu \leq 1$ en AM y ϕ_Δ puede llamarse con justicia **índice de modulación de fase**, o **desviación de fase**.

El diagrama del fasor rotativo en la figura 5.1-1 ayuda a interpretar la modulación de fase y conduce a la definición de la modulación de frecuencia. El ángulo total $\theta_c(t)$ está formado por un término rotacional constante $\omega_c t$ más $\phi(t)$, que corresponde a desplazamientos angulares relativos a la línea punteada. En consecuencia, la frecuencia instantánea de rotación del fasor en ciclos por segundo será

$$f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_c(t) = f_c + \frac{1}{2\pi}\dot{\phi}(t) \qquad [4]$$

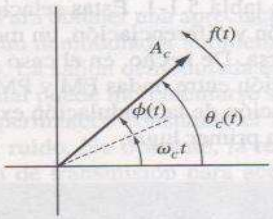


Figura 5.1-1 Representación con fasor rotativo de la modulación exponencial.

en donde la notación del punto representa la derivada con respecto al tiempo, esto es, $\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$, y así sucesivamente. A $f(t)$ se le conoce como **frecuencia instantánea** $x_c(t)$. Aunque $f(t)$ se mide en *hertz*, *no* debe confundirse con la frecuencia espectral. La frecuencia espectral f es la variable independiente del dominio de la frecuencia, en tanto que la frecuencia instantánea $f(t)$ es una propiedad dependiente del tiempo de las señales con modulación exponencial.

En el caso de la **modulación de frecuencia** (FM), la frecuencia instantánea de la onda modulada se define como

$$f(t) \triangleq f_c + f_\Delta x(t) \qquad f_\Delta < f_c \qquad [5]$$

de manera que $f(t)$ varía proporcionalmente con respecto a la señal moduladora. La constante de proporcionalidad f_Δ, llamada **desviación de frecuencia**, representa el máximo desplazamiento de $f(t)$ en relación con la frecuencia portadora f_c. El límite superior $f_\Delta < f_c$ asegura simplemente que $f(t) > 0$. Sin embargo, normalmente se desea que $f_\Delta \ll f_c$ para conservar la naturaleza de pasabandas de $x_c(t)$.

Las ecuaciones (4) y (5) muestran que una onda FM tiene $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$, y una integración da la modulación de fase

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int_{t_0}^{t} x(\lambda)\, d\lambda + \phi(t_0) \qquad t \geq t_0 \qquad [6a]$$

Si t_0 se toma de modo que $\phi(t_0) = 0$, es posible eliminar el límite inferior de la integración y usar la expresión informal

$$\phi(t) = 2\pi f_\Delta \int^{t} x(\lambda)\, d\lambda \qquad [6b]$$

La onda FM se escribe entonces como

$$x_c(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + 2\pi f_\Delta \int^{t} x(\lambda)\, d\lambda\right] \qquad [7]$$

Empero, se debe suponer que el mensaje no tiene *componente cd* de manera que las integrales anteriores no diverjan cuando $t \to \infty$. Físicamente, un término cd en $x(t)$ produciría un desplazamiento constante de la frecuencia portadora igual a $f_\Delta\langle x(t)\rangle$.

Comparar las ecuaciones (3) y (7) significa que hay poca diferencia entre la PM y la FM, pues la distinción esencial es la integración del mensaje en la FM. Además, pese a la nomenclatura, tanto la FM como la PM tienen fase y frecuencia que varían con el tiempo, como se indica en la tabla 5.1-1. Estas relaciones indican claramente que, con ayuda de redes de integración y diferenciación, un modulador de fase produce modulación de frecuencia y viceversa. De hecho, en el caso de modulación de tono es casi imposible visualizar la distinción entre ondas FM y PM.

Por otra parte, una comparación de la modulación exponencial con la lineal revela algunas diferencias radicales. En primer lugar,

La amplitud de una onda modulada exponencialmente es *constante*.

Tabla 5.1-1 Comparación de FM y PM

	Fase instantánea $\phi(t)$	Frecuencia instantánea $f(t)$
PM	$\phi_\Delta x(t)$	$f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \dot{x}(t)$
FM	$2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda$	$f_c + f_\Delta x(t)$

Por tanto, sin importar cuál sea el mensaje $x(t)$, la potencia promedio transmitida es

$$S_T = \tfrac{1}{2}A_c^2 \qquad [8]$$

En segundo lugar, los cruces en cero de una onda modulada exponencialmente *no son periódicos*, mientras que en la modulación lineal tales cruces siempre son periódicos. En efecto, debido a la propiedad de amplitud constante de la FM y la PM, se dice que

El mensaje es inherente a los *cruces en cero solamente*, a condición de que la frecuencia portadora sea grande.

Finalmente, como la modulación exponencial es un proceso no lineal,

La onda modulada no se parece en nada a la señal del mensaje.

La figura 5.1-2 ilustra algunos de estos puntos mostrando ondas AM, FM y PM representativas. Como ejercicio mental, usted puede comprobar estas formas de ondas con las señales moduladoras correspondientes. Para FM y PM esto se hace más fácilmente considerando la frecuencia instantánea en vez de sustituir $x(t)$ en las ecuaciones (3) y (7).

A pesar de que existen muchas semejanzas entre la PM y la FM, la modulación de frecuencia resulta tener propiedades superiores para la reducción del ruido y por ello recibirá una mayor atención. Para obtener una apreciación cualitativa de la reducción del ruido en FM, supóngase que un demodulador simplemente extrae de $x_c(t)$ la frecuencia instantánea $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$. La salida demodulada es entonces proporcional a la desviación de frecuencia f_Δ, la cual puede incrementarse sin aumentar la potencia transmitida S_T. Si el nivel de ruido permanece constante, el incremento de la señal de salida equivale a una reducción del ruido. No obstante, la reducción del ruido sí requiere un aumento del ancho de banda de transmisión para acomodar grandes desviaciones de frecuencia.

Irónicamente, la modulación de frecuencia se concibió primero como un medio para la **reducción del ancho de banda**, y el argumento era más o menos el siguiente:

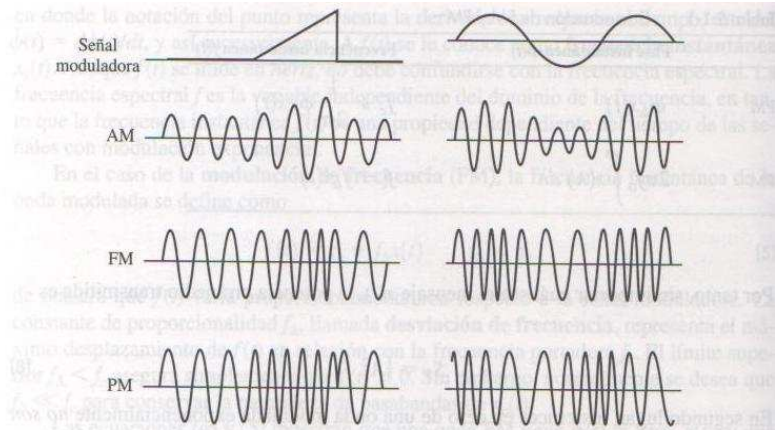


Figura 5.1-2 Formas de ondas AM, FM y PM representativas.

si en vez de modular la amplitud de la portadora, se modula la frecuencia variándola en una banda de, digamos, ±50 Hz, entones el ancho de banda de transmisión será de 100 Hz, independientemente del ancho de banda del mensaje. Como se verá más adelante, este argumento tiene una falla seria, porque ignora la distinción entre la **frecuencia instantánea** y la **espectral.** Carson (1922) reconoció la falacia de la noción de la reducción del ancho de banda y aclaró el problema en ese sentido. Desafortunadamente, él y muchos otros también pensaron que la modulación exponencial no tenía ventajas sobre la modulación lineal con respecto al ruido. Llevó algún tiempo superar esta creencia pero, gracias a Armstrong (1936), se apreciaron finalmente los méritos de la modulación exponencial. Antes de entenderlos cuantitativamente, hay que enfrentar el problema del análisis espectral.

EJERCICIO 5.1-1 Supóngase que se ha definido la FM en analogía directa con la AM escribiendo $x_c(t) = A_c \cos \omega_c(t)\, t$ con $\omega_c(t) = \omega_c[1 + \mu x(t)]$. Demuéstrese la imposibilidad física de esta definición encontrando $f(t)$ cuando $x(t) = \cos \omega_m t$.

PM y FM de banda angosta

El análisis espectral de la modulación exponencial comienza con la versión de portadora en cuadratura de la ecuación (1), a saber

$$x_c(t) = x_{ci}(t) \cos \omega_c t - x_{cq}(t) \operatorname{sen} \omega_c t \qquad [9]$$

donde

$$x_{ci}(t) = A_c \cos \phi(t) = A_c\left[1 - \frac{1}{2!}\phi^2(t) + \cdots\right] \qquad [10]$$

$$x_{cq}(t) = A_c \operatorname{sen} \phi(t) = A_c\left[\phi(t) - \frac{1}{3!}\phi^3(t) + \cdots\right]$$

Ahora se impone la condición simplificadora

$$|\phi(t)| \ll 1 \text{ rad} \qquad [11a]$$

de suerte que

$$x_{ci}(t) \approx A_c \qquad x_{cq}(t) \approx A_c\phi(t) \qquad [11b]$$

Entonces una tarea sencilla es encontrar el espectro $X_c(f)$ de la onda modulada en función de un espectro $X(f)$ de un mensaje arbitrario.

Específicamente, las transformadas de las ecuaciones (9) y (11*b*) dan

$$X_c(f) = \frac{1}{2}A_c\delta(f - f_c) + \frac{j}{2}A_c\Phi(f - f_c) \qquad f > 0 \qquad [12a]$$

en la que

$$\Phi(f) = \mathcal{F}[\phi(t)] = \begin{cases} \phi_\Delta X(f) & \text{PM} \\ -jf_\Delta X(f)/f & \text{FM} \end{cases} \qquad [12b]$$

La expresión para la FM se deriva del teorema de integración aplicado a $\phi(t)$ en la ecuación (6).

Con base en la ecuación (12), se concluye que si $x(t)$ tiene un ancho de banda del mensaje $W \ll f_c$, entonces $x_c(t)$ será una señal de pasabandas con ancho de banda $2W$. Pero esta conclusión es válida sólo en las condiciones de la ecuación (11). Para valores mayores de $|\phi(t)|$, los términos $\phi^2(t)$, $\phi^3(t)$, . . . no pueden ignorarse en la ecuación (10) e *incrementarán* el ancho de banda de $x_c(t)$. Por tanto, las ecuaciones (11) y (12) describen el caso especial de modulación de fase o de frecuencia de **banda angosta** (NBPM o NBFM).

EJEMPLO 5.1-1

Un dibujo informativo de la ecuación (12) se obtiene tomando $x(t) = \text{sinc } 2Wt$, de modo que $X(f) = (1/2W)\Pi(f/2W)$. Los espectros NBPM y NBFM resultantes se muestran en la figura 5.1-3. Ambos espectros tienen impulsos en la frecuencia portadora y ancho de banda $2W$. Sin embargo, la banda lateral inferior en la NBFM está 180° fuera de fase (representada por el signo negativo), mientras que ambas bandas laterales en la NBPM tienen un desplazamiento de fase de 90° (representado por j). Excepto por el desplazamiento de fase, el espectro NBPM es igual al espectro de la AM con la misma señal moduladora.

EJERCICIO 5.1-2

Usar las aproximaciones de segundo orden $x_{ci}(t) \approx A_c[1 - \frac{1}{2}\phi^2(t)]$ y $x_{cq}(t) \approx A_c\phi(t)$ para determinar y dibujar las componentes del espectro PM cuando $x(t) = \text{sinc } 2Wt$.

Modulación de tono

El estudio de la FM y PM con modulación de tono se realiza conjuntamente mediante el sencillo recurso de permitir una diferencia de 90° en los tonos moduladores, ya que se toma

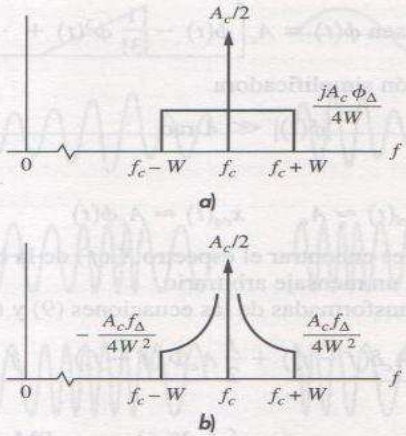


Figura 5.1-3 Espectros modulados de banda angosta con $x(t) = \text{sinc } 2Wt$. *a*) PM: *b*) FM.

$$x(t) = \begin{cases} A_m \operatorname{sen} \omega_m t & \text{PM} \\ A_m \cos \omega_m t & \text{FM} \end{cases}$$

entonces las ecuaciones (2) y (6) dan

$$\phi(t) = \beta \operatorname{sen} \omega_m t \qquad [13a]$$

donde

$$\beta \triangleq \begin{cases} \phi_\Delta A_m & \text{PM} \\ (A_m/f_m)f_\Delta & \text{FM} \end{cases} \qquad [13b]$$

El parámetro β sirve como el **índice de modulación** para PM o FM con modulación de tono. Este parámetro es igual a la **desviación de fase máxima** y es proporcional a la amplitud del tono A_m en los dos casos. Obsérvese, sin embargo, que β para FM es inversamente proporcional a la frecuencia del tono f_m ya que la integración de $\omega_m t$ produce $(\operatorname{sen} \omega_m t)/\omega_m$.

La modulación de tono de **banda angosta** requiere que $\beta \ll 1$, y la ecuación (9) se simplifica a

$$\begin{aligned} x_c(t) &\approx A_c \cos \omega_c t - A_c\beta \operatorname{sen} \omega_m t \operatorname{sen} \omega_c t \qquad [14] \\ &\approx A_c \cos \omega_c t - \frac{A_c\beta}{2}\cos(\omega_c - \omega_m)t + \frac{A_c\beta}{2}\cos(\omega_c + \omega_m)t \end{aligned}$$

El espectro de líneas y el diagrama fasorial correspondientes se muestran en la figura 5.1-4. Obsérvese cómo la inversión de fase de la línea en la banda lateral inferior produce una componente perpendicular o en *cuadratura* al fasor de la portadora. Esta relación de cuadratura es precisamente lo que se necesita para crear modulación de fase o de frecuencia, y no de amplitud.

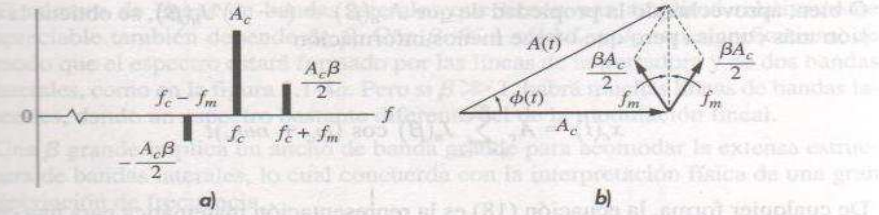


Figura 5.1-4 NBFM con modulación de tono. *a*) Espectro de línea; *b*) diagrama fasorial.

Ahora, para determinar el espectro de líneas con un valor arbitrario del índice de modulación, se omite la aproximación de banda angosta y se escribe

$$x_c(t) = A_c[\cos\phi(t)\cos\omega_c t - \operatorname{sen}\phi(t)\operatorname{sen}\omega_c t] \qquad [15]$$

$$= A_c[\cos(\beta\operatorname{sen}\omega_m t)\cos\omega_c t - \operatorname{sen}(\beta\operatorname{sen}\omega_m t)\operatorname{sen}\omega_c t]$$

Entonces, se aprovecha la característica de que, aunque $x_c(t)$ no es necesariamente periódica, los términos $x_c(t)\cos(\beta\operatorname{sen}\omega_m t)$ y $\operatorname{sen}(\beta\operatorname{sen}\omega_m t)$ sí son periódicos y cada uno puede expandirse como una serie de Fourier trigonométrica con $f_0 = f_m$. En efecto, un resultado bien conocido de la matemática aplicada expresa que

$$\cos(\beta\operatorname{sen}\omega_m t) = J_0(\beta) + \sum_{n\ \text{par}}^{\infty} 2J_n(\beta)\cos n\omega_m t \qquad [16]$$

$$\operatorname{sen}(\beta\operatorname{sen}\omega_m t) = \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} 2J_n(\beta)\operatorname{sen} n\omega_m t$$

donde n es positivo y

$$J_n(\beta) \triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta\operatorname{sen}\lambda - n\lambda)}\,d\lambda \qquad [17]$$

Los coeficientes $J_n(\beta)$ son **funciones de Bessel** de la primera clase, de orden n y argumento β. Con ayuda de la ecuación (17) debe haber pocos problemas para derivar las expresiones trigonométricas dadas en la ecuación (16).

Sustituyendo la ecuación (16) en la ecuación (15) y expandiendo los productos de senos y cosenos da finalmente

$$x_c(t) = A_c J_0(\beta)\cos\omega_c t \qquad [18a]$$

$$+ \sum_{n\ \text{impar}}^{\infty} A_c J_n(\beta)[\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t]$$

$$+ \sum_{n\ \text{par}}^{\infty} A_c J_n(\beta)[\cos(\omega_c + n\omega_m)t - \cos(\omega_c - n\omega_m)t]$$

O bien, aprovechando la propiedad de que $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$, se obtiene la expresión más concisa pero que ofrece menos información

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)t \qquad [18b]$$

De cualquier forma, la ecuación (18) es la representación matemática para una onda de amplitud constante cuya frecuencia instantánea varía senoidalmente. Una interpretación fasorial, que se dará dentro de poco, arrojará más luz sobre el problema.

Examinando la ecuación (18), se observa que

El espectro FM está formado por una línea de la frecuencia portadora más un número *infinito* de líneas de bandas laterales en las frecuencias $f_c \pm nf_m$. Todas las líneas están igualmente espaciadas por la frecuencia moduladora, y las líneas de las bandas laterales inferiores de orden impar están invertidas en fase o invertidas en relación con la portadora no modulada. En un espectro de líneas para frecuencias positivas, cualesquiera frecuencias negativas ($f_c + nf_m < 0$) deben doblarse hacia los valores positivos $|f_c + nf_m|$.

En la figura 5.1-5 se ilustra un espectro típico. Obsérvese que las componentes de frecuencias negativas serán despreciables siempre que $\beta f_m \ll f_c$. En general, la amplitud relativa de una línea en $f_c + nf_m$ está dada por $J_n(\beta)$, de modo que antes de añadir algo sobre el espectro, hay que examinar la conducta de las funciones de Bessel.

La figura 5.1-6*a* muestra algunas funciones de Bessel de varios órdenes graficadas contra el argumento β. De este gráfico se desprenden varias propiedades importantes.

1. La amplitud relativa de la línea portadora $J_0(\beta)$ varía de acuerdo con el índice de modulación y por ello depende de la señal moduladora. Así que, en contraste con la modulación lineal, la componente de frecuencia portadora de una onda FM "contiene" parte de la información del mensaje. No obstante, habrá espectros en los cuales la línea de la portadora tiene cero amplitud ya que $J_0(\beta) = 0$ cuando $\beta = 2.4, 5.5$, etcétera.

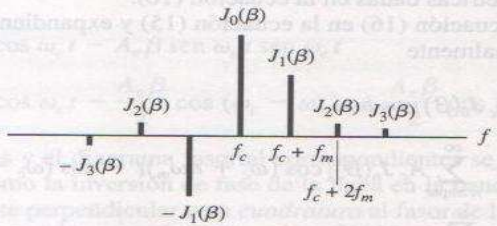


Figura 5.1-5 Espectro de líneas de FM con modulación de tono.

2. El número de líneas de bandas laterales que tienen una amplitud relativamente apreciable también depende de β. Con $\beta \ll 1$ sólo J_0 y J_1 son significativas, de modo que el espectro estará formado por las líneas de la portadora y de dos bandas laterales, como en la figura 5.1-4*a*. Pero si $\beta \gg 1$, habrá muchas líneas de bandas laterales, dando un espectro bastante diferente del de la modulación lineal.

3. Una β grande implica un ancho de banda grande para acomodar la extensa estructura de bandas laterales, lo cual concuerda con la interpretación física de una gran desviación de frecuencia.

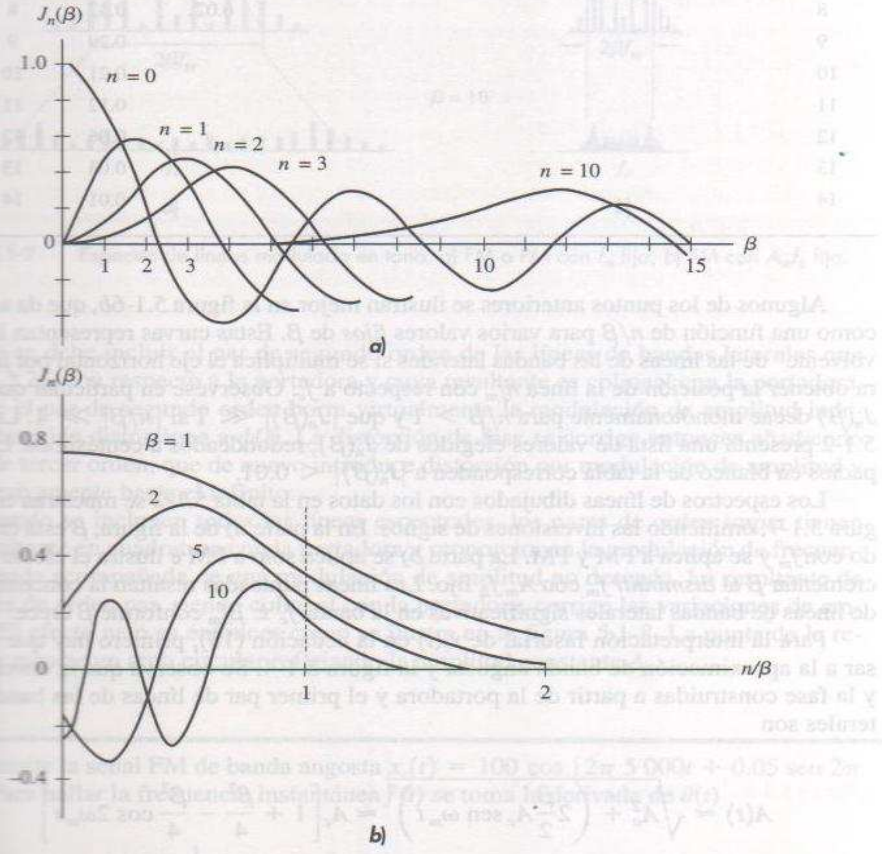


Figura 5.1-6 Gráficos de funciones de Bessel. *a*) Orden n fijo, argumento β variable; *b*) argumento β, fijo, orden n variable.

Tabla 5.1-2 Valores elegidos de $J_n(\beta)$

n	$J_n(0.1)$	$J_n(0.2)$	$J_n(0.5)$	$J_n(1.0)$	$J_n(2.0)$	$J_n(5.0)$	$J_n(10)$	n
0	1.00	0.99	0.94	0.77	0.22	−0.18	−0.25	0
1	0.05	0.10	0.24	0.44	0.58	−0.33	0.04	1
2			0.03	0.11	0.35	0.05	0.25	2
3				0.02	0.13	0.36	0.06	3
4					0.03	0.39	−0.22	4
5						0.26	−0.23	5
6						0.13	−0.01	6
7						0.05	0.22	7
8						0.02	0.32	8
9							0.29	9
10							0.21	10
11							0.12	11
12							0.06	12
13							0.03	13
14							0.01	14

Algunos de los puntos anteriores se ilustran mejor en la figura 5.1-6*b*, que da a $J_n(\beta)$ como una función de n/β para varios valores *fijos* de β. Estas curvas representan la "envolvente" de las líneas de las bandas laterales si se multiplica el eje horizontal por βf_m para obtener la posición de la línea nf_m con respecto a f_c. Obsérvese en particular que toda $J_n(\beta)$ decae monótonamente para $n/\beta > 1$ y que $|J_n(\beta)| \ll 1$ si $|n/\beta| \gg 1$. La tabla 5.1-2 presenta una lista de valores elegidos de $J_n(\beta)$, redondeados a centésimos. Los espacios en blanco de la tabla corresponden a $|J_n(\beta)| < 0.01$.

Los espectros de líneas dibujados con los datos en la tabla 5.1-2 se muestran en la figura 5.1-7, omitiendo las inversiones de signos. En la parte *a*) de la figura, β está creciendo con f_m y se aplica a FM y PM. La parte *b*) se aplica sólo a FM e ilustra el efecto de incrementar β al *disminuir* f_m con $A_m f_\Delta$ fijo. Las líneas punteadas resaltan la concentración de líneas de bandas laterales significativas en la banda $f_c \pm \beta f_m$ conforme β crece.

Para la interpretación fasorial de $x_c(t)$ en la ecuación (18), primero hay que regresar a la aproximación de banda angosta y la figura 5.1-4. Se observa que la envolvente y la fase construidas a partir de la portadora y el primer par de líneas de las bandas laterales son

$$A(t) \approx \sqrt{A_c^2 + \left(2\frac{\beta}{2}A_c \operatorname{sen} \omega_m t\right)^2} \approx A_c\left[1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{4}\cos 2\omega_m t\right]$$

$$\phi(t) \approx \arctan\left[\frac{2(\beta/2)A_c \operatorname{sen} \omega_m t}{A_c}\right] \approx \beta \operatorname{sen} \omega_m t$$

Así que la variación de fase es aproximadamente como se desea, pero hay una variación adicional de *amplitud* con el doble de la frecuencia del tono. Para cancelar este

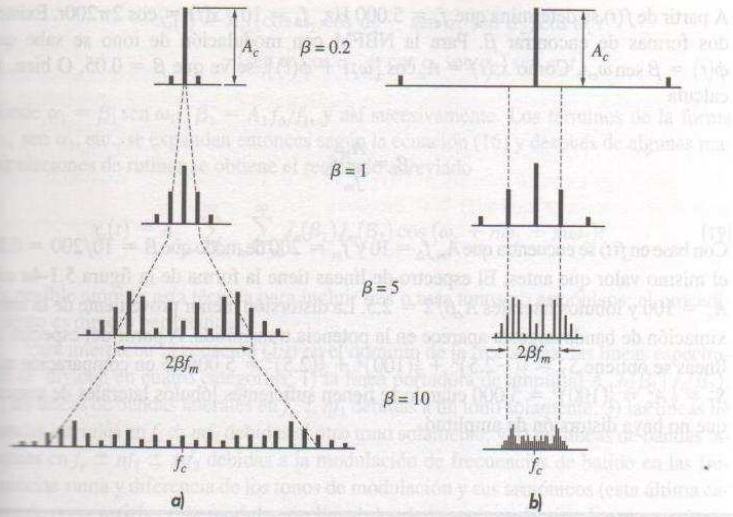


Figura 5.1-7 Espectro de líneas modulado en tono. *a)* FM o PM con f_m fija; *b)* FM con $A_m f_\Delta$ fija.

término se debe incluir el par de segundo orden de las líneas de bandas laterales que giran a $\pm 2f_m$ con respecto a la portadora y cuya resultante es colineal con la portadora. Aunque el par de segundo orden borra virtualmente la modulación de amplitud indeseada, también distorsiona a $\phi(t)$. La distorsión de fase se corrige entonces añadiendo el par de tercer orden, que de nuevo introduce distorsión por modulación de amplitud y así sucesivamente hasta el infinito.

Cuando se incluyen todas las líneas espectrales, los pares de orden impar tienen una resultante en cuadratura con la portadora y proporcionan la modulación de frecuencia deseada acompañada de una modulación de amplitud no deseada. La resultante de los pares de orden par, siendo colineal con la portadora, corrige las variaciones de amplitud. El efecto neto es entonces como se ilustra en la figura 5.1-8. La punta de la resultante recorre un arco circular reflejando la amplitud constante A_c.

EJEMPLO 5.1-2

Se transmite la señal FM de banda angosta $x_c(t) = 100 \cos [2\pi\, 5\,000t + 0.05 \operatorname{sen} 2\pi 200t]$. Para hallar la frecuencia instantánea $f(t)$ se toma la derivada de $\theta(t)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}(t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}[2\pi\, 5\,000 + 0.05(2\pi\, 200) \cos 2\pi\, 200\, t]$$

$$= 5\,000 + 10 \cos 2\pi\, 200\, t$$

A partir de $f(t)$ se determina que $f_c = 5\,000$ Hz, $f_\Delta = 10$ y $x(t) = \cos 2\pi 200t$. Existen dos formas de encontrar β. Para la NBFM con modulación de tono se sabe que $\phi(t) = \beta \operatorname{sen} \omega_m t$. Como $x_c(t) = A_c \cos [\omega_c t + \phi(t)]$, se ve que $\beta = 0.05$. O bien, se calcula

$$\beta = \frac{A_m}{f_m} f_\Delta$$

Con base en $f(t)$ se encuentra que $A_m f_\Delta = 10$ y $f_m = 200$ de modo que $\beta = 10/200 = 0.05$ el mismo valor que antes. El espectro de líneas tiene la forma de la figura 5.1-4*a* con $A_c = 100$ y lóbulos laterales $A_c\beta/2 = 2.5$. La distorsión menor proveniente de la aproximación de banda angosta aparece en la potencia transmitida. A partir del espectro de líneas se obtiene $S_T = \frac{1}{2}(-2.5)^2 + \frac{1}{2}(100)^2 + \frac{1}{2}(2.5)^2 = 5\,006.25$ en comparación con $S_T = \frac{1}{2}A_c^2 = \frac{1}{2}(100)^2 = 5\,000$ cuando se tienen suficientes lóbulos laterales de manera que no haya distorsión de amplitud.

EJERCICIO 5.1-3 Considérese la FM modulada en tono con $A_c = 100$, $A_m f_\Delta = 8$ kHz y $f_m = 4$ kHz. Dibújese el espectro de líneas para $f_c = 30$ kHz y para $f_c = 11$ kHz.

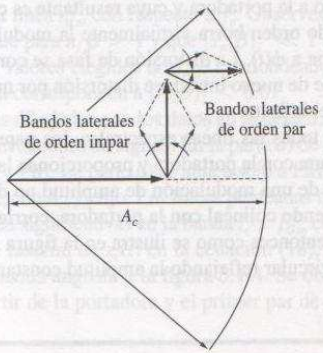


Figura 5.1-8 Diagrama fasorial FM para β arbitrario.

Modulación multitonal y periódica★

La técnica de las series de Fourier para llegar a la ecuación (18) también se aplica al caso de la FM con modulación multitonal. Por ejemplo, supóngase que $x(t) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$, donde f_1 y f_2 no están relacionadas armónicamente. La onda modulada se escribe primero como

$$x_c(t) = A_c[(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2)\cos\omega_c t - (\operatorname{sen}\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\alpha_1 \operatorname{sen}\alpha_2)\operatorname{sen}\omega_c t]$$

donde $\alpha_1 = \beta_1 \operatorname{sen}\omega_1 t$, $\beta_1 = A_1 f_\Delta / f_1$, y así sucesivamente. Los términos de la forma $\cos\alpha_1$ sen α_1, etc., se expanden entonces según la ecuación (16) y después de algunas manipulaciones de rutinas se obtiene el resultado abreviado

$$x_c(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos(\omega_c + n\omega_1 + m\omega_2)t \qquad [19]$$

Es posible ampliar esta técnica para incluir tres o más tonos no armónicos; el procedimiento es directo pero tedioso.

Para interpretar la ecuación (19) en el dominio de la frecuencia, las líneas espectrales se dividen en cuatro categorías: 1) la línea portadora de amplitud $A_c J_0(\beta_1) J_0(\beta_2)$; 2) las líneas de bandas laterales en $f_c \pm nf_1$ debidas a un tono solamente; 3) las líneas de bandas laterales en $f_c \pm mf_2$ debidas al otro tono solamente; y 4) las líneas de bandas laterales en $f_c \pm nf_1 \pm mf_2$ debidas a la modulación de frecuencias de batido en las frecuencias suma y diferencia de los tonos de modulación y sus armónicos (esta última categoría no ocurriría en la modulación lineal donde la regla es la simple superposición de las líneas de bandas laterales). En la figura 5.1-9 se da un espectro FM de doble tono que muestra los diferentes tipos de líneas espectrales para $f_1 \ll f_2$ y $\beta_1 > \beta_2$. En estas condiciones existe la curiosa propiedad de que cada línea de banda lateral en $f_c \pm nf_2$ se parece a otra portadora FM modulada con modulación de tono de frecuencia f_1.

Cuando las frecuencias de los tonos están relacionadas armónicamente; esto es, cuando es una señal *periódica*, entonces $\phi(t)$ es periódica y $e^{j\phi(t)}$ también lo es. Esta última puede expandirse en una serie de Fourier exponencial con coeficientes

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \exp j[\phi(t) - n\omega_0 t]\, dt \qquad [20a]$$

Por lo tanto,

$$x_c(t) = A_c \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j(\omega_c + n\omega_0)t}\right] \qquad [20b]$$

$A_c|c_n|$ es igual a la magnitud de la línea espectral en $f = f_c + nf_0$.

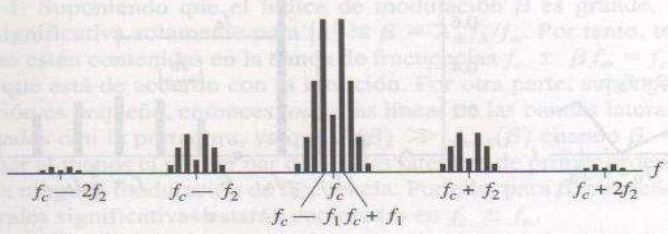


Figura 5.1-9 Espectro de líneas FM de doble tono con $f_1 \ll f_2$ y $\beta_1 > \beta_2$.

EJEMPLO 5.1-3 **FM con modulación de un tren de pulsos**

Sea $x(t)$ un tren de pulsos rectangulares de amplitud unitaria con periodo T_0, duración de pulso igual a τ, y ciclo de trabajo $d = \tau/T_0$. Después de remover la componente cd $\langle x(t)\rangle = d$, la frecuencia instantánea de la onda FM resultante es como se muestra en la figura 5.1-10*a*. El origen del tiempo se escoge de modo que la $\phi(t)$ graficada en la figura 5.1-10*b* tenga un valor pico $\phi_\Delta = 2\pi f_\Delta \tau$ en $t = 0$. También hemos tomado la constante de integración tal que $\phi(t) \geq 0$. Entonces

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_\Delta(1 + t/\tau) & -\tau < t < 0 \\ \phi_\Delta[1 - t/(T_0 - \tau)] & 0 < t < T_0 - \tau \end{cases}$$

la cual define el intervalo de integración para la ecuación (20*a*).

La evaluación de c_n no es un ejercicio trivial ya que involucra integrales exponenciales y relaciones trigonométricas. El resultado final se escribe como

$$c_n = \left[\frac{\operatorname{sen}\pi(\beta - n)d}{\pi(\beta - n)} + \frac{(1-d)\operatorname{sen}\pi(\beta - n)d}{\pi(\beta - n)d + \pi n}\right] e^{j\pi(\beta+n)d}$$

$$= \frac{\beta d}{(\beta - n)d + n} \operatorname{sinc}(\beta - n)d\, e^{j\pi(\beta+n)d}$$

donde se tomó

$$\beta = f_\Delta T_0 = f_\Delta / f_0$$

la cual desempeña un papel similar al índice de modulación para modulación de un solo tono.

La figura 5.1-10*c* ilustra el espectro de líneas de la magnitud para el caso de $d = 1/4$, $\beta = 4$ y $A_c = 1$. Obsérvese aquí la ausencia de simetría y los picos alrededor

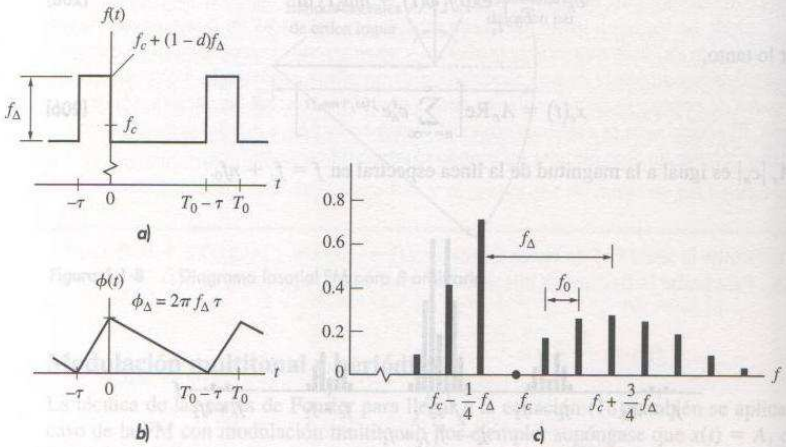


Figura 5.1-10 Modulación FM con tren de pulsos. *a*) Frecuencia instantánea; *b*) fase; *c*) espectro de líneas para $d = 1/4$.

de $f = f_c - \frac{1}{4}f_\Delta$ y $f = f_c + \frac{3}{4}f_\Delta$, los dos valores tomados por la frecuencia instantánea. El hecho de que el espectro contenga otras frecuencias también subraya la diferencia entre la frecuencia espectral y la frecuencia instantánea. Las mismas observaciones se aplican al espectro *continuo* de la FM con un pulso modulador único, demostrado por nuestros resultados en el ejemplo 2.5-1

5.2 ANCHO DE BANDA DE TRANSMISIÓN Y DISTORSIÓN

En general, el espectro de una señal con modulación exponencial tiene extensión infinita. Por tanto, la generación y la transmisión de FM *pura* requieren de un *ancho de banda infinito*, sin importar si el mensaje está limitado en banda o no. Pero los sistemas FM prácticos con ancho de banda finito sí existen y trabajan bastante bien. Su éxito depende del hecho de que, a frecuencias bastante alejadas de la frecuencia portadora, las componentes espectrales son muy pequeñas y pueden ser descartadas. Es cierto que la omisión de cualquier porción del espectro ocasionará *distorsión* en la señal demodulada, pero la distorsión puede minimizarse manteniendo todas las componentes espectrales significativas.

En esta sección se formularán estimados de los requerimientos de ancho de banda para la transmisión basándonos en resultados de la sección 5.1. Entonces se estudiará la distorsión producida por sistemas lineales y no lineales. Los temas que se abordarán incluyen el concepto de FM de **banda ancha** y una pieza importante de hardware FM conocida como un **limitador**. El estudio se abocará principalmente en la FM, pero pequeñas modificaciones hacen que el análisis sea aplicable a PM.

Estimados del ancho de banda de transmisión

La determinación del ancho de banda de transmisión FM se reduce a la pregunta: ¿qué cantidad del espectro de la señal modulada es *significativo*? Por supuesto, los estándares significativos no son absolutos, más bien dependen de la cantidad de distorsión que puede ser tolerada en una aplicación específica. Sin embargo, criterios empíricos basados en estudios de la modulación de tono han tenido éxito considerable y conducen a relaciones aproximadas útiles. En consecuencia, la discusión de los requerimientos de ancho de banda en FM comienza con las líneas de bandas laterales significativas para la modulación de tono.

La figura 5.1-6 indica que $J_n(\beta)$ decae rápidamente para $|n/\beta| > 1$, particularmente si $\beta \gg 1$. Suponiendo que el índice de modulación β es grande, se afirma que $J_n(\beta)$ es significativa solamente para $|n| \leq \beta = A_m f_\Delta / f_m$. Por tanto, todas las líneas significativas están contenidas en la banda de frecuencias $f_c \pm \beta f_m = f_c \pm A_m f_\Delta$, una conclusión que está de acuerdo con la intuición. Por otra parte, suponga que el índice de modulación es pequeño, entonces *todas* las líneas de las bandas laterales son pequeñas comparadas con la portadora, ya que $J_0(\beta) \gg J_{n\neq 0}(\beta)$ cuando $\beta \ll 1$. Pero debemos retener al menos el primer par de bandas laterales de primer orden, porque si no, no se tendría ninguna modulación de frecuencia. Por ello, para β, pequeño, las líneas de bandas laterales significativas estarán contenidas en $f_c \pm f_m$.

Para poner las observaciones anteriores en una perspectiva cuantitativa, todas las líneas de bandas laterales con amplitud relativa $|J_n(\beta)| > \epsilon$ se *definen* como significativas, donde ϵ varía desde 0.01 hasta 0.1 de acuerdo con la aplicación. Entonces, si $|J_M(\beta)| > \epsilon$ y $|J_{M+1}(\beta)| < \epsilon$, existen M *pares* de bandas laterales significativas y $2M + 1$ líneas significativas. El ancho de banda se escribe entonces como

$$B = 2M(\beta) f_m \qquad M(\beta) \geq 1 \qquad [1]$$

ya que las líneas están separadas por f_m y M depende del índice de modulación β. La condición $M(\beta) \geq 1$ se incluyó en la ecuación (1) para explicar el hecho de que B no puede ser menor que $2f_m$.

La figura 5.2-1 muestra a M como una función continua de β para $\epsilon = 0.01$ y 0.1. Estudios experimentales indican que la primera función suele ser demasiado conservadora, mientras que la última puede resultar en una distorsión pequeña pero notable. Los valores de M entre estos dos límites son aceptables para la mayoría de las aplicaciones y se usarán de aquí en adelante.

Pero el ancho de banda B no es el ancho de banda de transmisión B_T; más bien, es el ancho de banda mínimo necesario para la modulación por un tono de amplitud y frecuencia especificadas. Para estimar B_T, debemos calcular el ancho de banda *máximo* requerido cuando los parámetros del tono están restringidos por $A_m \leq 1$ y $f_m \leq W$. Para este propósito, la línea punteada de la figura 5.2-1 muestra la aproximación

$$M(\beta) \approx \beta + 2 \qquad [2]$$

la cual cae entre las líneas sólidas para $\beta \geq 2$. Insertando la ecuación (2) en la ecuación (1) da

$$B \approx 2(\beta + 2) f_m = 2\left(\frac{A_m f_\Delta}{f_m} + 2\right) f_m = 2(A_m f_\Delta + 2 f_m)$$

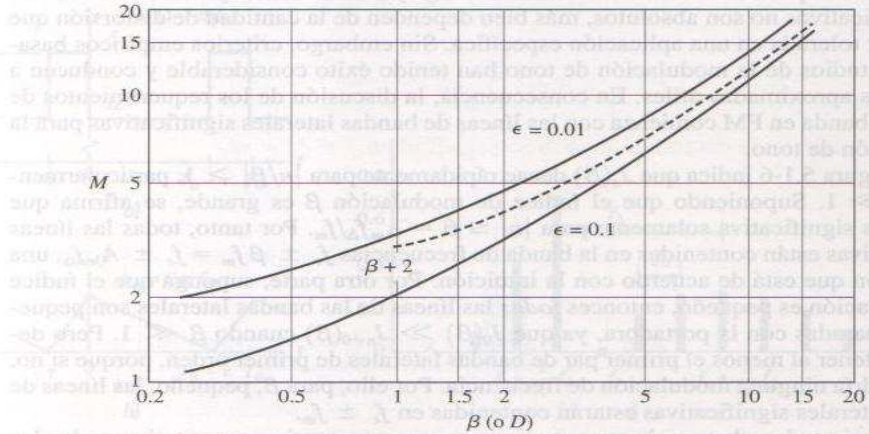


Figura 5.2-1 El número de pares de bandas laterales significativas en función de β (o D).

Ahora, teniendo en mente que f_Δ es una propiedad del modulador, ¿cuál es el tono que produce el máximo ancho de banda? Resulta obvio que es el tono de *máxima amplitud y máxima frecuencia* con $A_m = 1$ y $f_m = W$. El peor ancho de banda para la modulación de tono es entonces

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) \qquad \text{si } \beta > 2$$

Obsérvese cuidadosamente que el índice de modulación correspondiente $\beta = f_\Delta/W$ no es el valor máximo de β sino más bien el valor que, al combinarse con la máxima frecuencia de modulación, produce el máximo ancho de banda. Cualquier otro tono que tenga $A_m < 1$ o $f_m < W$ requerirá menos ancho de banda aunque β puede ser mayor.

Finalmente, considérese una *señal moduladora arbitraria* pero suave que tiene el ancho de banda del mensaje W y que satisface la convención de normalización $|x(t)| \leq 1$. Se estimará B_T directamente a partir del análisis para el peor caso de modulación de tono, suponiendo que cualquier componente en $x(t)$ de menor amplitud o frecuencia requerirá un ancho de banda menor que B_T. Se admite el hecho de que la superposición no es aplicable a la modulación exponencial. Sin embargo, la investigación de espectros multitonales ha mostrado que los pares de bandas laterales de frecuencias de banda están contenidos fundamentalmente dentro del ancho de banda del tono dominante aislamente, como se ilustra en la figura 5.1-9.

En consecuencia, extrapolando la modulación de tono para una señal moduladora arbitraria, se define la **relación de desviación**

$$D \triangleq \frac{f_\Delta}{W} \qquad [3]$$

que es igual a la desviación máxima dividida entre la máxima frecuencia de modulación, análoga al índice de modulación del peor caso de modulación de tono. El ancho de banda de transmisión requerido para $x(t)$ es

$$B_T = 2\,M(D)W \qquad [4]$$

donde D se trata en la misma forma que β para determinar $M(D)$, digamos, a partir de la figura 5.2-1.

Como no se cuenta con curvas o tablas apropiadas para $M(D)$, hay varias aproximaciones a B_T que pueden emplearse. Con valores extremos de la relación de desviación se encuentra que

$$B_T = \begin{cases} 2DW = 2f_\Delta & D \gg 1 \\ 2W & D \ll 1 \end{cases}$$

semejante a los resultados con β muy grande o muy pequeño. Ambas aproximaciones se combinan en la relación conveniente

$$B_T \approx 2(f_\Delta + W) = 2(D + 1)W \qquad \begin{matrix} D \gg 1 \\ D \ll 1 \end{matrix} \qquad [5]$$

conocida como la **regla de Carson**. Contra la lógica, la mayoría de los sistemas FM reales tienen $2 < D < 10$, para los cuales la regla de Carson subestima el ancho de banda de transmisión. Una mejor aproximación para el diseño de equipos es entonces

$$B_T \approx 2(f_\Delta + 2W) = 2(D + 2)W \qquad D > 2 \qquad [6]$$

que se usaría, por ejemplo, para determinar el ancho de banda de 3 dB de amplificadores FM. Obsérvese que la regla de Carson sobreestima B_T para algunas aplicaciones que usan la aproximación de banda angosta. El ancho de banda de la señal transmitida en el ejemplo 5.1-2 es 400 Hz, mientras que la ecuación (5) estima $B_T \approx 420$ Hz.

Físicamente, la relación de desviación representa la **máxima desviación de fase** de una onda FM bajo el peor caso de las condiciones de ancho de banda. Las expresiones citadas para el ancho de banda FM, por tanto, se aplican a la modulación de **fase** si se reemplaza D con la máxima desviación de fase ϕ_Δ de la onda PM. En consecuencia, el ancho de banda de transmisión para PM con una $x(t)$ arbitraria se estima en

$$B_T = 2M(\phi_\Delta)W \qquad M(\phi_\Delta) \geq 1 \qquad [7a]$$

o

$$B_T \approx 2(\phi_\Delta + 1)W \qquad [7b]$$

que es la aproximación equivalente a la regla de Carson. Estas expresiones difieren del caso FM en el que ϕ_Δ es independiente de W.

Se deben revisar las diferentes aproximaciones y sus condiciones de validez. En deferencia a la mayoría de la literatura, usualmente se tomará B_T como la da la regla de Carson en las ecuaciones (5) y (7*b*). Pero cuando la señal moduladora tiene discontinuidades —un tren de pulsos rectangulares, por ejemplo— los estimados del ancho de banda son inválidos y debemos recurrir a la fuerza bruta con el análisis espectral.

EJEMPLO 5.2-1 **Ancho de banda FM comercial**

Las estaciones de radio FM comerciales en los Estados Unidos están limitadas a una desviación de frecuencia máxima de 75 kHz, y las frecuencias moduladoras cubren comúnmente desde 30 Hz hasta 15 kHz. Tomando $W = 15$ kHz, la relación de desviación es $D = 75$ kHz/15 kHz $= 5$ y la ecuación (6) da $B_T \approx 2(5 + 2) \times 15$ kHz $= 210$ kHz. Las radios FM de alta calidad tienen anchos de banda de al menos 200 kHz. La regla de Carson en la ecuación (5) subestima el ancho de banda, dando $B_T \approx 180$ kHz.

Si un solo tono de modulación tiene $A_m = 1$ y $f_m = 15$ kHz, entonces $\beta = 5$, $M(\beta) \approx 7$, y la ecuación (1) muestra que $B = 210$ kHz. Un tono de menor frecuencia, digamos 3 kHz, daría como resultado un mayor índice de modulación ($\beta = 25$), un mayor número de pares de bandas laterales significativas ($M = 27$), pero un menor ancho de banda ya que $B = 2 \times 27 \times 3$ kHz $= 162$ kHz.

EJERCICIO 5.2-1 Calcúlese B_T/W para $D = 0.3$, 3 y 30 usando las ecuaciones (5) y (6) donde sean aplicables.

Distorsión lineal

El análisis de la distorsión producida en una onda FM o PM por una red lineal es un problema bastante complejo, al grado de que se han diseñado varios enfoques diferentes.

ninguno sencillo. Panter (1965) dedica tres capítulos al tema y sirve como guía de referencia. Puesto que en esta obra se le han dedicado pocas páginas, solamente puede apreciarse la "punta del iceberg". No obstante, surgirán ideas valiosas referentes a la distorsión lineal de la FM y la PM.

La figura 5.2-2 representa una señal de pasabandas modulada exponencialmente $x_c(t)$ aplicada a un sistema lineal con función de transferencia $H(f)$, que produce la salida $y_c(t)$. La propiedad de amplitud constante de $x_c(t)$ permite escribir la entrada equivalente de pasabajas

$$x_{\ell p}(t) = \tfrac{1}{2} A_c e^{j\phi(t)} \qquad [8]$$

donde $\phi(t)$ contiene la información del mensaje. En función de $X_{\ell p}(f)$, el espectro de salida de pasabajas equivalente es

$$Y_{\ell p}(f) = H(f + f_c)u(f + f_c)X_{\ell p}(f) \qquad [9]$$

La transformación de pasabajas a pasabandas da finalmente la salida como

$$y_c(t) = 2 \operatorname{Re}\left[y_{\ell p}(t)e^{j\omega_c t}\right] \qquad [10]$$

Mientras que este método parece ser sencillo en el papel, los cálculos de $X_{\ell p}(f) = \mathcal{F}[x_{\ell p}(t)]$ y $y_{\ell p}(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y_{\ell p}(f)]$ generalmente resultan ser obstáculos principales. Entonces son necesarias técnicas numéricas asistidas por computadora.

Uno de los pocos casos para los cuales las ecuaciones (8) a (10) dan resultados en forma cerrada es el de la función de transferencia graficada en la figura 5.2-3. La ganancia $|H(f)|$ es igual a K_0 en f_c y aumenta (o disminuye) linealmente con pendiente K_1/f_c; la curva de desplazamiento de fase corresponde a un retardo t_0 de portadora y un

Figura 5.2-2

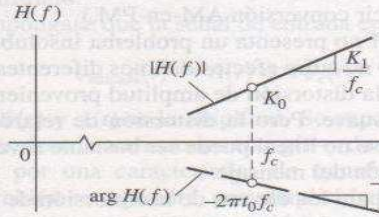


Figura 5.2-3

retardo t_1, de grupo, como se discutió en el ejemplo 4.1-1. El equivalente de pasabajas de $H(f)$ es

$$H(f + f_c)\, u\,(f + f_c) = \left(K_0 + \frac{K_1}{f_c} f\right) e^{-j2\pi(t_0 f_c + t_1 f)}$$

y la ecuación (9) se convierte en

$$Y_{\ell p}(f) = K_0 e^{-j\omega_c t_0}[X_{\ell p}(f)\, e^{-j2\pi t_1 f}] + \frac{K_1}{j\omega_c} e^{-j\omega_c t_0}[(j2\pi f) X_{\ell p}(f) e^{-j2\pi t_1 f}]$$

Recurriendo a los teoremas de retardo temporal y de diferenciación para $\mathcal{F}^{-1}[Y_{\ell p}(f)]$ se ve que

$$y_{\ell p}(t) = K_0 e^{-j\omega_c t_0} x_{\ell p}(t - t_1) + \frac{K_1}{j\omega_c} e^{-j\omega_c t_0} \dot{x}_{\ell p}(t - t_1)$$

donde

$$\dot{x}_{\ell p}(t - t_1) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} A_c e^{j\phi(t - t_1)}\right] = \frac{j}{2} A_c \dot{\phi}(t - t_1) e^{j\phi(t - t_1)}$$

obtenida a partir de la ecuación (7).

Insertando estas expresiones en la ecuación (10) da la señal de salida

$$y_c(t) = A(t) \cos\left[\omega_c(t - t_0) + \phi(t - t_1)\right] \qquad [11a]$$

la cual tiene una amplitud variable en el tiempo

$$A(t) = A_c\left[K_0 + \frac{K_1}{\omega_c} \dot{\phi}(t - t_1)\right] \qquad [11b]$$

En el caso de una entrada FM $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta\, x(t)$ de modo que

$$A(t) = A_c\left[K_0 + \frac{K_1 f_\Delta}{f_c} x(t - t_1)\right] \qquad [12]$$

La ecuación (12) tiene la misma forma que la envolvente de una onda AM con $\mu = K_1 f_\Delta / K_0 f_c$. La conclusión es entonces que $|H(f)|$ en la figura 5.2-3 produce **conversión de FM-en-AM**, junto con el retardo de portadora t_0 y el de grupo t_1 producido por arg $H(f)$. (A propósito, una revisión del ejemplo 4.2-2 revela que la distorsión de amplitud de una onda AM puede producir conversión AM-en-PM.)

La conversión AM-en-FM no presenta un problema insoluble para la transmisión de FM o PM, siempre que $\phi(t)$ no sufra efectos dañinos diferentes del retardo temporal. Por consiguiente, se ignorará la distorsión de amplitud proveniente de cualquier curva de ganancia razonablemente suave. Pero la distorsión de retardo proveniente de una curva de desplazamiento de fase no lineal puede ser bastante severa y debe compensarse para conservar la información del mensaje.

Un enfoque simplificado para los efectos de la distorsión de fase lo proporciona la aproximación *cuasiestática*, la cual supone que la frecuencia instantánea de una onda FM con $f_\Delta \gg W$ varía tan lentamente en comparación con $1/W$ que $x_c(t)$ se parece más

o menos a una senoidal ordinaria con frecuencia $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$, ya que si la respuesta del sistema a un senoidal de frecuencia portadora es

$$y_c(t) = A_c|H(f_c)| \cos [\omega_c t + \arg H(f_c)]$$

y si $x_c(t)$ tiene una frecuencia instantánea $f(t)$, que varía lentamente, entonces

$$y_c(t) \approx A_c|H[f(t)]| \cos \{\omega_c t + \phi(t) + \arg H[f(t)]\} \quad [13]$$

Se puede demostrar que esta aproximación requiere de la condición

$$|\ddot{\phi}(t)|_{\text{máx}} \left| \frac{1}{H(f)} \frac{d^2H(f)}{df^2} \right|_{\text{máx}} \ll 8\pi^2 \quad [14]$$

en donde $|\ddot{\phi}(t)| \leq 4\pi^2 f_\Delta W$ para FM modulada en tono con $f_m \leq W$. Si $H(f)$ representa un filtro pasabandas de sintonización sencilla con ancho de banda de 3 dB igual a B, entonces el segundo término en la ecuación (14) es igual a $8/B^2$ y la condición se convierte en $4f_\Delta W/B^2 \ll 1$ la cual es satisfecha por el requisito del ancho de banda de transmisión $B \geq B_T$.

Supóngase ahora que la ecuación (14) es válida y que el sistema tiene un desplazamiento de fase no lineal de modo que $H(f) = \alpha f^2$, donde α es una constante. Al sustituir $f(t) = f_c + \dot{\phi}(t)/2\pi$ se obtiene

$$\arg H[f(t)] = \alpha f_c^2 + \frac{\alpha f_c}{\pi} \dot{\phi}(t) + \frac{\alpha}{4\pi^2} \dot{\phi}^2(t)$$

Así que la fase total en la ecuación (13) será distorsionada por la adición de $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\phi}^2(t)$.

EJERCICIO 5.2-2

Sea $|H(f)| = 1$ y $\arg H(f) = -2\pi t_1(f - f_c)$. Demuéstrese que las ecuaciones (11) y (13) dan el mismo resultado con $\phi(t) = \beta \operatorname{sen} \omega_m t$ siempre que $\omega_m t_1 \ll \pi$.

Distorsión no lineal y limitadores

La distorsión de amplitud de una onda FM produce conversión de FM-en-AM. Aquí se demostrará que la AM resultante puede eliminarse mediante el uso de distorsión *no lineal* controlada y por filtrado.

Para el análisis, supóngase que la señal de entrada en la figura 5.2-4 es

$$v_{\text{entrada}}(t) = A(t) \cos \theta_c(t)$$

donde $\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t)$ y $A(t)$ es la amplitud. Se supone que el elemento no lineal **no tiene memoria** —es decir, no almacena energía— de modo que la entrada y la salida están relacionadas por una característica de transferencia no lineal instantánea $v_{\text{salida}} = T[v_{\text{entrada}}]$. También se supondrá, por simplicidad que $T[0] = 0$.

Aunque $v_{\text{entrada}}(t)$ no es necesariamente periódica en el tiempo, puede considerarse como una *función periódica de* θ_c con periodo 2π. (Trate de visualizar un gráfico de

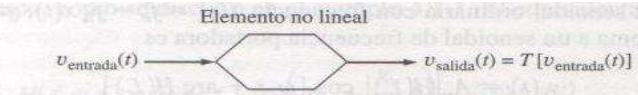


Figura 5.2-4

v_{entrada} *versus* θ_c con el tiempo fijo.) De igual forma, la salida es una función periódica de θ_c y puede expandirse en la serie de Fourier trigonométrica

$$v_{\text{salida}} = \sum_{n=1}^{\infty} |2a_n| \cos (n\theta_c + \arg a_n) \quad [15a]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} T[v_{\text{entrada}}] e^{-jn\theta_c} d\theta_c \quad [15b]$$

La variable del tiempo t no aparece aquí explícitamente, pero v_{salida} depende de t a través de la variación temporal de θ_c. Adicionalmente, los coeficientes a_n pueden ser funciones del tiempo cuando la amplitud de v_{entrada} tiene variaciones con el tiempo.

Pero primero se considerará el caso de una entrada FM no distorsionada, de modo que $A(t)$ sea igual a la constante A_c y todas las a_n sean constantes. En consecuencia, escribiendo la ecuación (15a) término por término con t incluido explícitamente, se tiene

$$v_{\text{salida}}(t) = |2a_1| \cos [\omega_c t + \phi(t) + \arg a_1] + |2a_2| \cos [2\omega_c t + 2\phi(t) + \arg a_2] + \cdots \quad [16]$$

Esta expresión revela que la distorsión no lineal produce ondas FM adicionales en *armónicos* de la frecuencia portadora, el n-ésimo armónico tiene amplitud constante $|2a_n|$ y modulación de fase $n\phi(t)$ más un desplazamiento de fase constante igual a $\arg a_n$.

Si estas ondas no se traslapan en el dominio de la frecuencia, la entrada no *distorsionada* se recupera aplicando la salida distorsionada a un *filtro pasabandas*. Por ello se dice que la FM goza de inmunidad considerable contra los efectos de la distorsión no lineal sin memoria.

Debe regresarse ahora a la FM con variaciones de amplitud $A(t)$ indeseadas. Esas variaciones pueden corregirse por un **limitador duro ideal** o **recortador** cuya característica de transferencia se dibuja en la figura 5.2-5a. La figura 5.2-5b muestra un circuito recortador que emplea diodos Zener con voltaje de ruptura V_0 en la salida de un amplificador de alta ganancia.

La salida del recortador es esencialmente una onda cuadrada, ya que $T[v_{\text{entrada}}] = V_0 \operatorname{sgn} v_{\text{entrada}}$ y

$$v_{\text{salida}} = \begin{cases} +V_0 & v_{\text{entrada}} > 0 \\ -V_0 & v_{\text{entrada}} < 0 \end{cases}$$

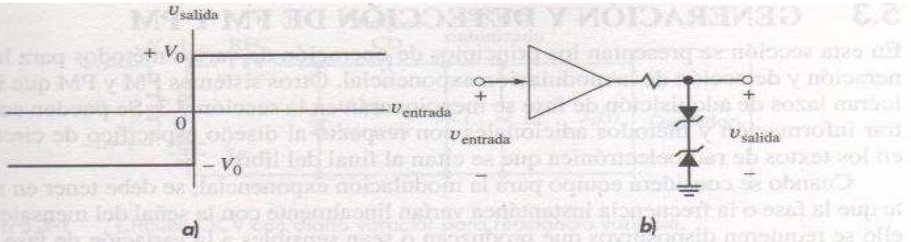


Figura 5.2-5 Limitador duro. *a*) Característica de transferencia; *b*) realización circuital con diodos Zener.

Los coeficientes se determinan entonces a partir de la ecuación (15*b*) y son

$$a_n = \begin{cases} 4V_0/\pi n & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -4V_0/\pi n & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

que son independientes del tiempo porque $A(t) \geq 0$ no afecta el signo de $v_{entrada}$. Por lo tanto,

$$v_{salida}(t) = \frac{8V_0}{\pi}\cos[\omega_c t + \phi(t)] - \frac{8V_0}{3\pi}\cos[3\omega_c t + 3\phi(t)] + \cdots \quad [17]$$

y filtrando a pasabandas produce una onda FM de amplitud constante si las componentes de $v_{salida}(t)$ no tienen traslape espectral. Entre paréntesis, este análisis apoya la afirmación previa de que la información del mensaje es inherente, de manera íntegra, a los *cruces de cero* de una onda FM o PM.

La figura 5.2-6 resume estos resultados. El limitador más el BPF en la parte a elimina variaciones de amplitud indeseadas de una onda AM o PM y se usaría en un receptor. El elemento no lineal en la parte *b*) distorsiona una onda de amplitud constante, pero el BPF pasa solamente el término no distorsionado en el *n*-ésimo armónico. Esta combinación actúa como un *multiplicador de frecuencia* si $n > 1$, y se usa en ciertos tipos de transmisores.

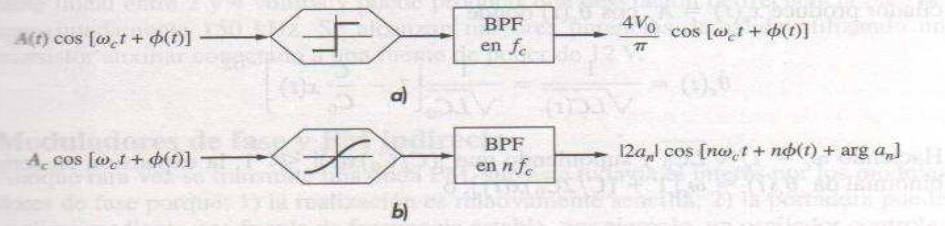


Figura 5.2-6 Circuitos de procesamiento no lineal. *a*) Limitador de amplitud; *b*) multiplicador de frecuencia.

5.3 GENERACIÓN Y DETECCIÓN DE FM Y PM

En esta sección se presentan los principios de operación de varios métodos para la generación y detección de la modulación exponencial. Otros sistemas FM y PM que involucran lazos de adquisición de fase se mencionarán en la sección 7.3. Se pueden encontrar información y métodos adicionales con respecto al diseño específico de circuitos en los textos de radioelectrónica que se citan al final del libro.

Cuando se considera equipo para la modulación exponencial, se debe tener en mente que la fase o la frecuencia instantánea varían linealmente con la señal del mensaje. Por ello se requieren dispositivos que produzcan o sean sensibles a la variación de fase o de frecuencia en forma lineal. Uno puede aproximarse a estas características de diferente forma, pero algunas veces es difícil obtener una relación lineal adecuada en una banda de operación amplia.

Por otra parte, la propiedad de amplitud constante de la modulación exponencial es una gran ventaja desde el punto de vista del hardware. En primer lugar, el diseñador no necesita preocuparse de la excesiva disipación de potencia o de ruptura por alto voltaje debidas a picos extremos en la envolvente. En segundo lugar, la inmunidad relativa a la distorsión no lineal permite el uso de dispositivos electrónicos no lineales que distorsionarían irremediablemente una señal con modulación lineal. En consecuencia, es posible tener una libertad considerable en el diseño y selección del equipo. Como un ejemplo, los enlaces repetidores de microondas de los sistemas de comunicación telefónica de larga distancia emplean la FM, principalmente porque los amplificadores lineales de banda ancha requeridos para la modulación de amplitud no están disponibles en frecuencias de microondas.

FM directa y OCV

Conceptualmente, la FM directa es sencilla y no requiere sino de un **oscilador controlado por voltaje** (OCV) cuya frecuencia de oscilación tenga una dependencia lineal del voltaje aplicado. Es posible modular un oscilador convencional de circuito sintonizado introduciendo un elemento de **reactancia variable** como parte del circuito resonante LC en paralelo. Si la capacitancia equivalente tiene una dependencia del tiempo de la forma

$$C(t) = C_0 - Cx(t)$$

y si $Cx(t)$ es lo "suficientemente pequeña" y lo "suficientemente lenta", entonces el oscilador produce $x_c(t) = A_c \cos\theta_c(t)$ donde

$$\dot{\theta}_c(t) = \frac{1}{\sqrt{LC(t)}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\left[1 - \frac{C}{C_0}x(t)\right]^{-1/2}$$

Haciendo $\omega_c = 1/\sqrt{LC_0}$ y suponiendo que $|(C/C_0)x(t)| \ll 1$, la expansión en serie binomial da $\dot{\theta}_c(t) \approx \omega_c[1 + (C/2C_0)x(t)]$, o

$$\theta_c(t) \approx 2\pi f_c t + 2\pi\frac{C}{2C_0}f_c\int^t x(\lambda)d\lambda \quad [1]$$

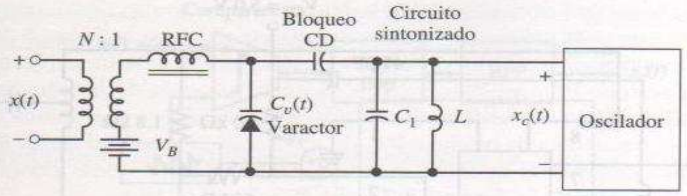


Figura 5.3-1 Circuito OCV con diodo varactor para reactancia variable.

que constituye la modulación de frecuencia con $f_\Delta = (C/2C_0)f_c$. Puesto que $|x(t)| \leq 1$, la aproximación es buena hasta dentro de un 1 por ciento cuando $C/C_0 < 0.013$ entonces la desviación de frecuencia alcanzable está limitada por

$$f_\Delta = \frac{C}{2C_0} f_c \leq 0.006\, f_c \qquad [2]$$

Esta limitación cuantifica el significado de $Cx(t)$ cuando es "pequeña", y raramente impone un problema para el diseño. Similarmente, la condición usual $W \ll f_c$ asegura que $Cx(t)$ es lo "suficientemente lenta".

La figura 5.3-1 muestra un oscilador de circuito sintonizado con un diodo varactor polarizado para obtener $C_x(t)$. El transformador de entrada, la bobina de RF (RFC) y el bloqueo cd sirven para aislar los voltajes de baja frecuencia, de alta frecuencia y cd. La principal desventaja con este tipo de circuito es que la frecuencia portadora tiende a derivar y debe ser estabilizada mediante un control de frecuencia realimentado bastante elaborado. Por esta razón, muchos de los transmisores FM más antiguos son del tipo indirecto.

Algunos osciladores controlados por voltaje en la forma de circuitos integrados (CI) lineales generan una señal de salida FM directa que es relativamente estable y precisa. No obstante, para operar, los OCV CI requieren varios componentes externos adicionales. Debido a su baja potencia de salida, son más adecuados para aplicaciones tales como teléfonos inalámbricos. La figura 5.3-2 muestra el diagrama esquemático para un transmisor FM directo que usa el Motorola MCI1376, un modulador FM CI de 8 pines. El MC1376 opera con frecuencias portadoras entre 1.4 y 14 MHz. El OCV es bastante lineal entre 2 y 4 voltios y puede producir una desviación de frecuencia pico de aproximadamente 150 kHz. Se alcanzan mayores potencias de salida utilizando un transistor auxiliar conectado a una fuente de poder de 12 V.

Moduladores de fase y FM indirecta

Aunque rara vez se transmite una onda PM, subsiste todavía el interés por los moduladores de fase porque: 1) la realización es relativamente sencilla; 2) la portadora puede suplirse mediante una fuente de frecuencia estable, por ejemplo, un oscilador controlado por cristal; y 3) la integración de la señal de entrada a un modulador de fase produce una salida modulada *en frecuencia*.

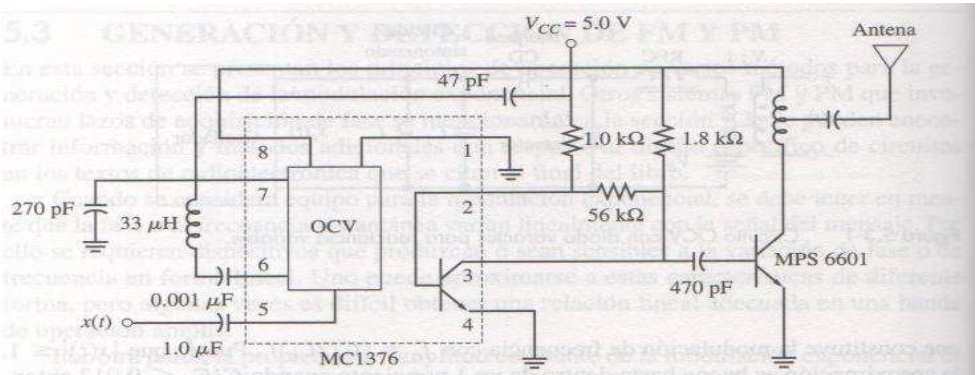


Figura 5.3-2 Diagrama esquemático de un generador de FM directa por IC OCV usando el Motorola MC1376.

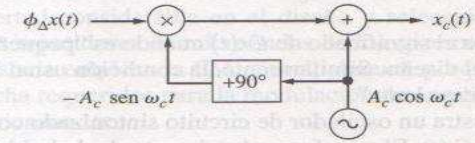


Figura 5.3-3 Modulador de fase de banda angosta.

La figura 5.3-3 ilustra un modulador de fase de banda angosta obtenido a partir de la aproximación $x_c(t) \approx A_c \cos \omega_c t - A_c \phi_\Delta x(t) \operatorname{sen} \omega_c t$ véanse las ecuaciones (9) y (11), sección 5.1. La simplicidad evidente de este modulador depende de la condición de aproximación $|\phi_\Delta x(t)| \ll 1$ radián, y desviaciones de fase mayores que 10° dan por resultado una modulación distorsionada.

Se pueden alcanzar mayores desplazamientos de fase con un modulador de **circuito de conmutación** como el de la figura 5.3-4. Las señales típicas mostradas en la figura 5.3-4 ayudan a explicar la operación. La señal moduladora y una onda en forma de diente de sierra con el doble de la frecuencia portadora se aplican a un comparador. El voltaje de salida del comparador se hace alto siempre que $x(t)$ excede la onda de diente de sierra y los flip-flops conmutan estados en cada borde creciente de un pulso del comparador. El flip-flop produce entonces una onda cuadrada modulada en fase (como la salida de un limitador duro) y el filtrado de pasabandas produce $x_c(t)$.

Considérese ahora el transmisor de FM indirecta diagramado en la figura 5.3-5. El integrador y el modulador de fase constituyen un modulador de *frecuencia de banda angosta* que genera una señal NBFM inicial con frecuencia instantánea

$$f_1(t) = f_{c_1} + \frac{\phi_\Delta}{2\pi T}\, x(t)$$

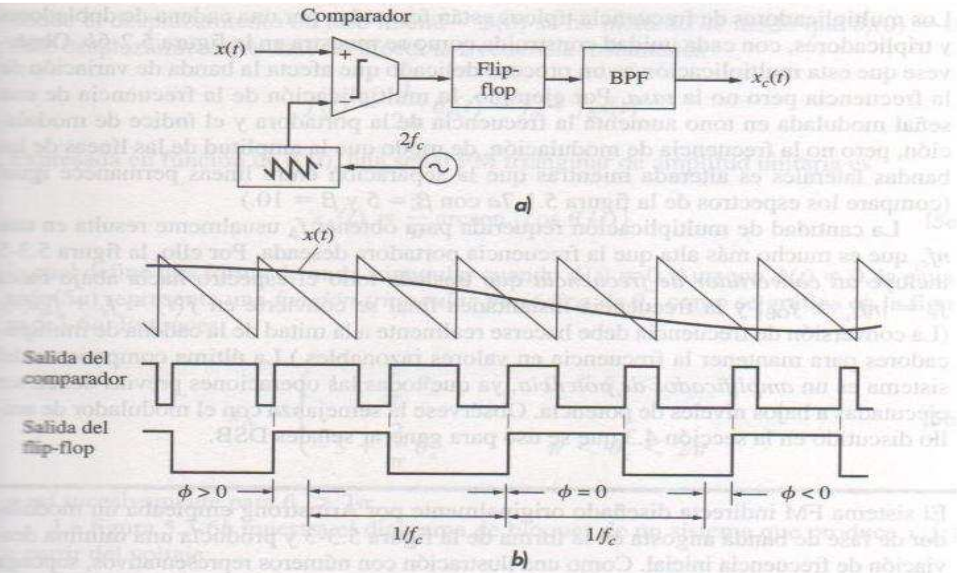


Figura 5.3-4 Modulador de fase de circuito de conmutación. *a)* Diagrama esquemático; *b)* ondas.

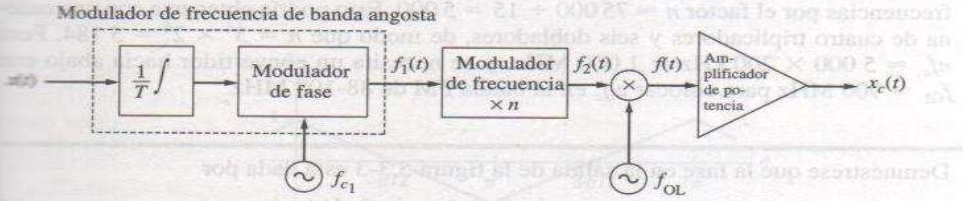


Figura 5.3-5 Transmisor de FM indirecta.

donde T es la constante de proporcionalidad del integrador. La desviación inicial de la frecuencia es por tanto igual a $\phi_\Delta/2\pi T$ y debe incrementarse hasta el valor deseado f_Δ mediante un **multiplicador de frecuencia**.

El multiplicador de frecuencia produce una multiplicación de n veces la *frecuencia instantánea*, de modo que

$$f_2(t) = nf_1(t) = nf_{c_1} + f_\Delta x(t) \quad [3]$$

donde

$$f_\Delta = n\left(\frac{\phi_\Delta}{2\pi T}\right)$$

Los multiplicadores de frecuencia típicos están formados por una cadena de dobladores y triplicadores, con cada unidad construida como se muestra en la figura 5.2-6*b*. Obsérvese que esta multiplicación es un proceso delicado que afecta la banda de variación de la frecuencia pero no la *tasa*. Por ejemplo, la multiplicación de la frecuencia de una señal modulada en tono aumenta la frecuencia de la portadora y el índice de modulación, pero no la frecuencia de modulación, de modo que la amplitud de las líneas de las bandas laterales es alterada mientras que la separación entre líneas permanece igual (compare los espectros de la figura 5.1-7*a* con $\beta = 5$ y $\beta = 10$.)

La cantidad de multiplicación requerida para obtener f_Δ usualmente resulta en una nf_{c_1} que es mucho más alta que la frecuencia portadora deseada. Por ello, la figura 5.3-5 incluye un *convertidor de frecuencia* que traslada todo el espectro hacia abajo hasta $f_c = |nf_{c_1} \pm f_{OL}|$ y la frecuencia instantánea final se convierte en $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$. (La conversión de frecuencia debe hacerse realmente a la mitad de la cadena de multiplicadores para mantener la frecuencia en valores razonables.) La última componente del sistema es un *amplificador de potencia*, ya que todas las operaciones previas deben ser ejecutadas a bajos niveles de potencia. Obsérvese la semejanza con el modulador de anillo discutido en la sección 4.3 que se usó para generar señales DSB.

EJEMPLO 5.3-1

El sistema FM indirecta diseñado originalmente por Armstrong empleaba un modulador de fase de banda angosta en la forma de la figura 5.3-3 y producía una mínima desviación de frecuencia inicial. Como una ilustración con números representativos, suponga que $\phi_\Delta/2\pi T \approx 15$ Hz (lo que asegura una distorsión de modulación despreciable) y que $f_{c_1} = 200$ kHz (la cual cae cerca del límite inferior de los circuitos osciladores de cristal prácticos). La salida de una emisora FM con $f_\Delta = 75$ kHz requiere multiplicación de frecuencias por el factor $n \approx 75\,000 \div 15 = 5\,000$. Esto podría obtenerse con una cadena de cuatro triplicadores y seis dobladores, de modo que $n = 3^4 \times 2^6 = 5\,184$. Pero $nf_{c_1} \approx 5\,000 \times 200$ kHz $= 1\,000$ MHz, y se necesita un convertidor hacia abajo con $f_{OL} \approx 900$ MHz para colocar a f_c en la banda FM de 88-108 MHz.

EJERCICIO 5.3-1

Demuéstrese que la fase en la salida de la figura 5.3-3 está dada por

$$\phi(t) = \phi_\Delta x(t) - \tfrac{1}{3}\phi_\Delta^3 x^3(t) + \tfrac{1}{5}\phi_\Delta^5 x^5(t) + \cdots \quad [4]$$

Por lo que $\phi(t)$ contiene *distorsión de armónicos impares* a menos que ϕ_Δ sea muy pequeña.

FM de onda triangular★

La FM de onda triangular es un método moderno y bastante ingenioso para la modulación de frecuencia que supera los problemas propios de los OCV y sistemas de FM indirecta convencionales. El método genera modulación virtualmente sin distorsión en frecuencias portadoras de hasta 30 MHz y es particularmente adecuado para aplicaciones de instrumentación.

Se definirá la FM triangular trabajando hacia atrás partiendo desde $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ con

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t) - \phi(0)$$

donde el desplazamiento de fase inicial $-\phi(0)$ se ha incluido de modo que $\theta_c(0) = 0$. Este desplazamiento de fase no afecta la frecuencia instantánea

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_c(t) = f_c + f_\Delta x(t)$$

Expresada en función de $\theta_c(t)$, una señal FM triangular de amplitud unitaria es

$$x_\Lambda(t) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}[\cos\theta_c(t)] \qquad [5a]$$

la cual define una forma de onda triangular cuando $\phi(t) = 0$. Aun con $\phi(t) \neq 0$, la ecuación (5*a*) representa una *función triangular periódica de* θ_c, como se gráfica en la figura 5.3-6*a*. Entonces,

$$x_\Lambda = \begin{cases} 1 - \dfrac{2}{\pi}\theta_c & 0 < \theta_c < \pi \\ -3 + \dfrac{2}{\pi}\theta_c & \pi < \theta_c < 2\pi \end{cases} \qquad [5b]$$

y así sucesivamente para $\theta_c > 2\pi$.

La figura 5.3-6*b* muestra el diagrama de bloques de un sistema que produce $x_\Lambda(t)$ a partir del voltaje

$$v(t) = \frac{2}{\pi}\dot{\theta}_c(t) = 4[f_c + f_\Delta x(t)]$$

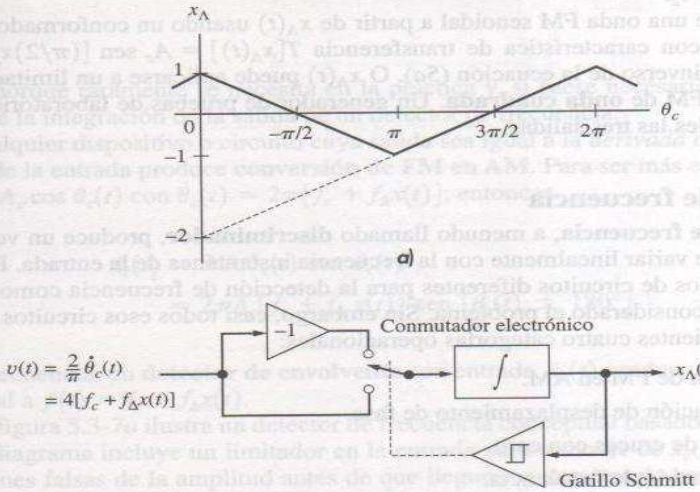


Figura 5.3-6 Forma de onda triangular FM. *a*) Forma de onda; *b*) sistema de modulación.

el cual se deriva fácilmente de la forma de onda del mensaje $x(t)$. El sistema está integrado por un inversor analógico, un integrador y un disparador o gatillo de Schmitt que controla un conmutador electrónico. El gatillo o iniciador coloca el interruptor en la posición superior siempre que $x_\Lambda(t)$ aumenta a $+1$ y en la parte inferior cuando $x_\Lambda(t)$ disminuye a -1.

Supóngase que el sistema comienza su operación en $t = 0$ y con $x_\Lambda(0) = +1$ y el conmutador en la posición superior. Entonces, para $0 < t < t_1$,

$$x_\Lambda(t) = 1 - \int_0^t v(\lambda)\,d\lambda = 1 - \frac{2}{\pi}[\theta_c(t) - \theta_c(0)]$$

$$= 1 - \frac{2}{\pi}\theta_c(t) \qquad 0 < t < t_1$$

de modo que $x_\Lambda(t)$ recorre la rampa descendente en la figura 5.3-6*a* hasta el tiempo t_1 cuando $x_\Lambda(t_1) = -1$, correspondiente a $\theta_c(t_1) = \pi$. Aquí el gatillo pasa el conmutador a la posición inferior y

$$x_\Lambda(t) = -1 + \int_{t_1}^t v(\lambda)\,d\lambda = -1 + \frac{2}{\pi}[\theta_c(t) - \theta_c(t_1)]$$

$$= -3 + \frac{2}{\pi}\theta_c(t) \qquad t_1 < t < t_2$$

de suerte que $x_\Lambda(t)$ recorre la rampa ascendente en la figura 5.3-6*a*. La rampa ascendente continúa hasta el tiempo t_2 cuando $\theta_c(t_2) = 2\pi$ y $x_\Lambda(t_2) = +1$. El conmutador entonces se regresa a la posición superior y el ciclo de operación continúa periódicamente para $t > t_2$.

Se obtiene una onda FM senoidal a partir de $x_\Lambda(t)$ usando un conformador de ondas no lineal con característica de transferencia $T[x_\Lambda(t)] = A_c \operatorname{sen}[(\pi/2)x_\Lambda(t)]$, el cual realiza el inverso de la ecuación (5*a*). O $x_\Lambda(t)$ puede aplicarse a un limitador duro para producir FM de **onda cuadrada**. Un generador de pruebas de laboratorio podría tener disponibles las tres salidas.

Detección de frecuencia

Un **detector de frecuencia**, a menudo llamado **discriminador**, produce un voltaje de salida que debe variar linealmente con la frecuencia instantánea de la entrada. Hay quizá tantos diseños de circuitos diferentes para la detección de frecuencia como diseñadores que han considerado el problema. Sin embargo, casi todos esos circuitos caen en una de las siguientes cuatro categorías operacionales:

1. Conversión de FM en AM.
2. Discriminación de desplazamiento de fase.
3. Detección de cruces con cero.
4. Realimentación de frecuencia.

Se estudiarán ejemplos ilustrativos de las primeras tres categorías, posponiendo la realimentación de frecuencia a la sección 7.3. La detección de *fase* analógica no se discu-

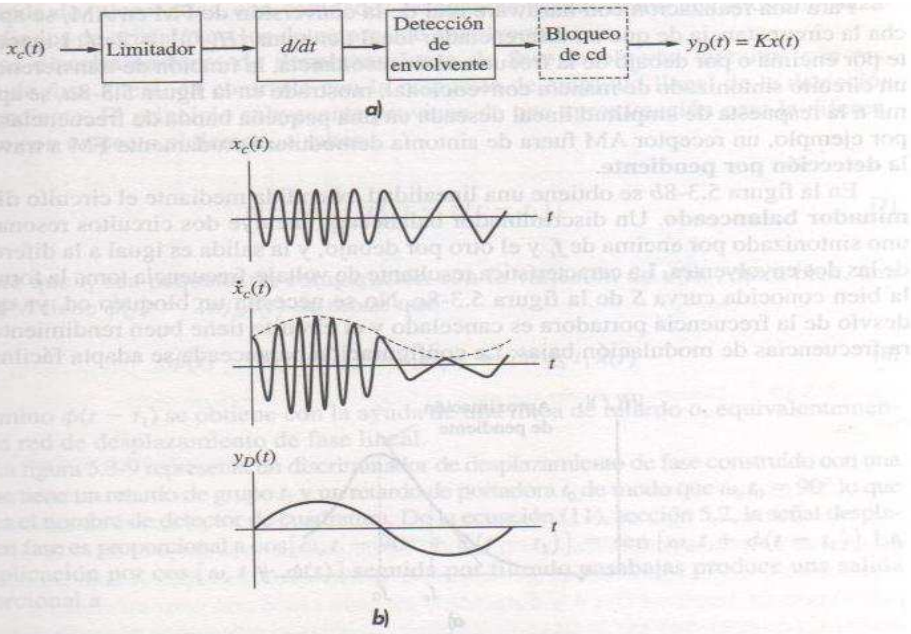


Figura 5.3-7 a) Detector de frecuencia con limitador y conversión FM-AM; b) formas de ondas.

e aquí porque raramente se necesita en la práctica y, si fuese necesaria, se obtendría mediante la integración de la salida de un detector de frecuencia.

Cualquier dispositivo o circuito cuya salida sea igual a la *derivada con respecto al tiempo* de la entrada produce **conversión de FM en AM**. Para ser más específicos, sea $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ con $\dot{\theta}_c(t) = 2\pi[f_c + f_\Delta x(t)]$; entonces

$$\dot{x}_c(t) = -A_c \dot{\theta}_c(t) \operatorname{sen} \theta_c(t) \qquad [6]$$
$$= 2\pi A_c[f_c + f_\Delta x(t)] \operatorname{sen} [\theta_c(t) \pm 180°]$$

En consecuencia, un **detector de envolvente** con entrada $\dot{x}_c(t)$ produce una salida proporcional a $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$.

La figura 5.3-7*a* ilustra un detector de frecuencia conceptual basado en la ecuación (6). El diagrama incluye un limitador en la entrada para remover de $x_c(t)$ cualesquiera variaciones falsas de la amplitud antes de que lleguen al detector de envolvente. También incluye un bloqueo de cd para eliminar de la señal de salida la constante de desviación de la frecuencia portadora. En la figura 5.3-7*b* se ilustran formas de ondas características para el caso de modulación de tono.

Para una realización con hardware real de la conversión de FM en AM, se aprovecha la circunstancia de que un diferenciador ideal tiene una $|H(f)| = 2\pi f$. Ligeramente por encima o por debajo de la frecuencia de resonancia, la función de transferencia de un circuito sintonizado de manera convencional, mostrado en la figura 5.3-8*a*, se aproxima a la respuesta de amplitud lineal deseada en una pequeña banda de frecuencias. Así, por ejemplo, un receptor AM fuera de sintonía demodulará crudamente FM a través de la **detección por pendiente**.

En la figura 5.3-8*b* se obtiene una linealidad extendida mediante el circuito **discriminador balanceado**. Un discriminador balanceado incluye dos circuitos resonantes, uno sintonizado por encima de f_c y el otro por debajo, y la salida es igual a la diferencia de las dos envolventes. La característica resultante de voltaje-frecuencia toma la forma de la bien conocida curva *S* de la figura 5.3-8*c*. No se necesita un bloqueo cd, ya que el desvío de la frecuencia portadora es cancelado y el circuito tiene buen rendimiento para frecuencias de modulación bajas. La configuración balanceada se adapta fácilmente

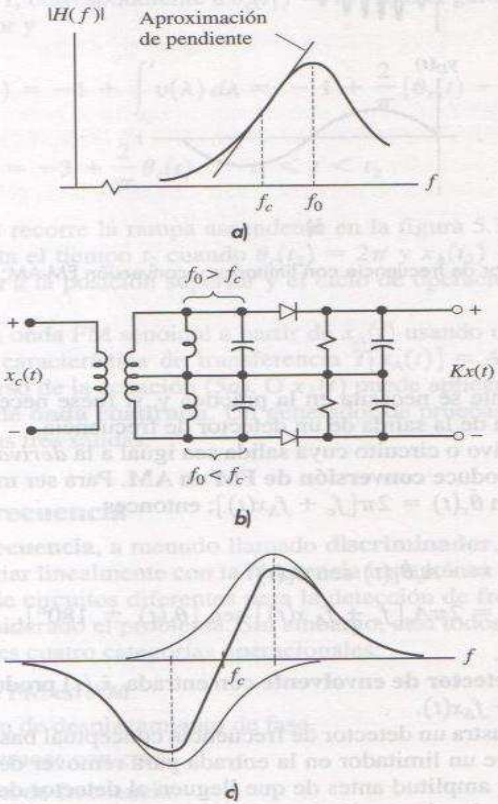


Figura 5.3-8 a) Detección por pendiente con un circuito sintonizado; b) circuito de discriminador balanceado; c) característica de frecuencia-voltaje.

a la banda de microondas, con cavidades resonantes usadas como circuitos sintonizados y diodos de cristal para los detectores de envolvente.

Los **discriminadores de desplazamiento de fase** involucran circuitos con respuesta de *fase* lineal, en contraste con la respuesta de amplitud lineal de la detección por pendiente. El principio subyacente proviene de una aproximación para la diferenciación con respecto al tiempo, a saber,

$$v(t) \approx \frac{1}{t_1}[v(t) - v(t - t_1)] \qquad [7]$$

siempre que t_1 sea pequeño en comparación con la variación de $v(t)$. Ahora bien, una onda FM tiene $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta x(t)$ de modo que

$$\phi(t) - \phi(t - t_1) \approx t_1\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta t_1 x(t) \qquad [8]$$

El término $\phi(t - t_1)$ se obtiene con la ayuda de una línea de retardo o, equivalentemente, una red de desplazamiento de fase lineal.

La figura 5.3-9 representa un discriminador de desplazamiento de fase construido con una red que tiene un retardo de grupo t_1 y un retardo de portadora t_0 de modo que $\omega_c t_0 = 90°$ lo que explica el nombre de detector de cuadratura. De la ecuación (11), sección 5.2, la señal desplazada en fase es proporcional a $\cos[\omega_c t - 90° + \phi(t - t_1)] = \text{sen}\,[\omega_c t + \phi(t - t_1)]$. La multiplicación por $\cos\,[\omega_c t + \phi(t)]$ seguida por filtrado pasabajas produce una salida proporcional a

$$\text{sen}[\phi(t) - \phi(t - t_1)] \approx \phi(t) - \phi(t - t_1)$$

suponiendo que t_1 es lo suficientemente pequeño que $|\phi(t) - \phi(t - t_1)| \ll \pi$. En consecuencia,

$$y_D(t) \approx K_D f_\Delta x(t)$$

donde la constante de detección K_D incluye a t_1. A pesar de estas aproximaciones, un detector de cuadratura proporciona mejor linealidad que un discriminador balanceado y una frecuencia se encuentra en receptores de alta calidad.

Otras realizaciones del circuito de desplazamiento de fase incluyen el **discriminador de Foster-Seely** y el popular **detector de relación**. Este último es particularmente ingenioso y económico ya que combina las operaciones de limitación y demodulación en una sola unidad. Para mayores detalles, véase Tomasi (1998, capítulo 7).

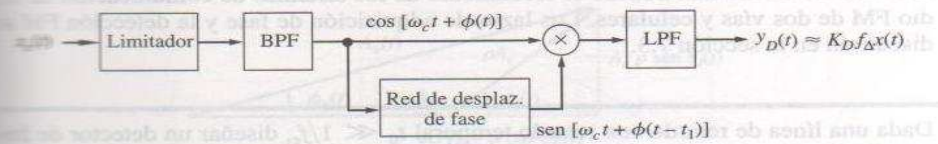


Figura 5.3-9 Discriminador de desplazamiento de fase o detector de cuadratura.

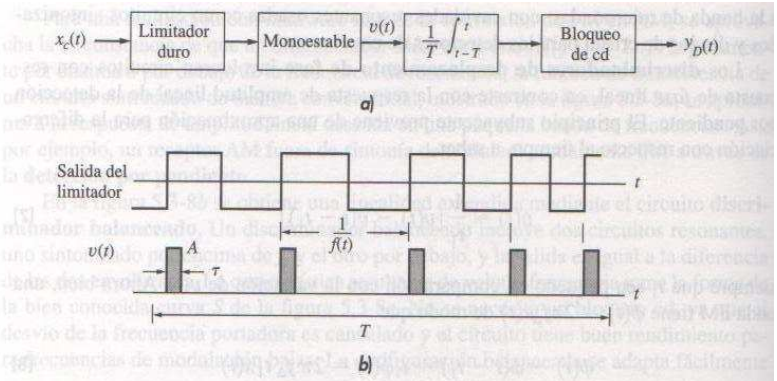


Figura 5.3-10 Detector de cruces con cero. a) Diagrama; b) formas de onda.

Por último, la figura 5.3-10 muestra el diagrama y formas de ondas de un **detector de cruces de ceros** simplificado. La señal FM de onda cuadrada proveniente de un limitador duro dispara (inicia) un generador de pulsos monoestable, el cual produce un pulso corto de amplitud fija A y duración τ en cada cruce con cero ascendente (o descendente) de la onda FM. Si se apela al punto de vista cuasiestático y se considera un intervalo de tiempo T tal que $W \ll 1/T \ll f_c$, la salida del monoestable $v(t)$ se parece a un tren de pulsos rectangulares con periodo $1/f(t)$ casi constante. Entonces, en este intervalo hay $n_T \approx Tf(t)$ pulsos, e integrando continuamente a $v(t)$ en los T segundos pasados da

$$\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} v(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{T}n_T A\tau \approx A\tau f(t)$$

la cual se convierte en $y_D(t) \approx K_D f_\Delta x(t)$ después del bloqueo de cd.

Los detectores comerciales de cruces con cero pueden tener una linealidad mejor que 0.1 por ciento y operan con frecuencias centrales desde 1 Hz hasta 10 MHz. Se inserta un contador que divide entre diez después del limitador duro para extender la banda hasta 100 MHz.

En la actualidad la mayoría de los dispositivos para comunicación FM utilizan circuitos integrados lineales para la detección de FM. Su confiabilidad, pequeño tamaño y facilidad de diseño han nutrido el crecimiento de los sistemas de comunicación de radio FM de dos vías y celulares. Los lazos de adquisición de fase y la detección FM se discutirán en la sección 7.3.

EJERCICIO 5.3-2 Dada una línea de retardo con retardo temporal $t_0 \ll 1/f_c$, diseñar un detector de frecuencia basado en las ecuaciones (6) y (7).

5.4 INTERFERENCIA

La *interferencia* se refiere a la contaminación de una señal portadora de información por una señal similar, usualmente proveniente de una fuente humana. Esto ocurre en la comunicación de radio cuando la antena receptora capta hasta dos o más señales en la misma banda de frecuencias. La interferencia también puede ser resultado de la propagación por multitrayectorias o por acoplamiento electromagnético entre cables de transmisión. Independientemente de la causa, una interferencia severa previene una recuperación exitosa de la información del mensaje.

El estudio aquí desarrollado de la interferencia comienza con el caso sencillo pero informativo de senoidales que se interfieren y que representan ondas portadoras no moduladas. Este caso simplificado ayuda a resaltar las diferencias entre los efectos de la interferencia en AM, FM y PM. Entonces se verá cómo la técnica de **filtrado de desénfasis** mejora el rendimiento FM en la presencia de interferencia. Se concluye con una breve revisión del **efecto de captura** en FM.

Senoidales interferentes

Considérese un receptor sintonizado en alguna frecuencia portadora f_c. Supóngase que la señal total recibida es

$$v(t) = A_c \cos \omega_c t + A_i \cos [(\omega_c + \omega_i)t + \phi_i]$$

El primer término representa la señal deseada como una portadora no modulada, mientras que el segundo término es una portadora interferente con amplitud A_i, frecuencia $f_c + f_i$, ángulo de fase relativa ϕ_i.

Para expresar $v(t)$ en la forma de envolvente y fase $v(t) = A_v(t) \cos [\omega_c t + \phi_v(t)]$, se introducirá

$$\rho \triangleq A_i/A_c \qquad \theta_i(t) \triangleq \omega_i t + \phi_i \qquad [1]$$

Por tanto, $A_i = \rho A_c$ y la construcción fasorial en la figura 5.4-1 da

$$A_v(t) = A_c\sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \theta_i(t)} \qquad [2]$$

$$\phi_v(t) = \arctan \frac{\rho \operatorname{sen} \theta_i(t)}{1 + \rho \cos \theta_i(t)}$$

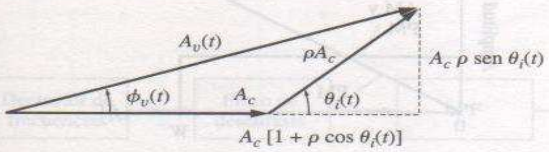


Figura 5.4-1 Diagrama fasorial de portadoras interferentes.

Estas expresiones muestran que senoidales interferentes producen tanto *modulación de amplitud* como *modulación de fase*. De hecho, si $\rho \ll 1$ entonces

$$A_v(t) \approx A_c[1 + \rho \cos (\omega_i t + \phi_i)] \qquad [3]$$
$$\phi_v(t) \approx \rho \operatorname{sen} (\omega_i t + \phi_i)$$

la cual se parece a *modulación de tono* en la frecuencia f_i con índice de modulación $\mu = \rho$ e índice de modulación FM o PM $\beta = \rho$. En el otro extremo, si $\rho \gg 1$ entonces

$$A_v(t) \approx A_i[1 + \rho^{-1} \cos (\omega_i t + \phi_i)]$$
$$\phi_v(t) \approx \omega_i t + \phi_i$$

de modo que la envolvente todavía tiene modulación de tono pero la fase corresponde a una frecuencia portadora desplazada $f_c + f_i$ más la constante ϕ_i.

A continuación se investiga lo que sucede cuando $v(t)$ es aplicada a un demodulador ideal de envolvente, de fase o de frecuencia con constante de detección K_D. Se tomará el caso de interferencia débil ($\rho \ll 1$) y se usará la aproximación en la ecuación (3) con $\phi_i = 0$. Entonces, la salida del demodulador es

$$y_D(t) \approx \begin{cases} K_D(1 + \rho \cos \omega_i t) & \text{AM} \\ K_D \rho \operatorname{sen} \omega_i t & \text{PM} \\ K_D \rho f_i \cos \omega_i t & \text{FM} \end{cases} \qquad [4]$$

siempre que $|f_i| \leq W$ de otra forma, el filtro pasabajas en la salida del demodulador rechazaría a $|f_i| > W$. El término constante en el resultado AM sería removido si el demodulador incluyera un bloqueo de cd. En la forma como está escrito, este resultado también es válido para detección *sincrónica* en sistemas DSB y SSB ya que se supuso que $\phi_i = 0$. El factor de multiplicación f_i en el resultado FM proviene de la desviación de la frecuencia instantánea $\phi_v(t)/2\pi$.

La ecuación (4) revela que una interferencia débil en un sistema de modulación lineal o de modulación de fase produce un tono de salida falso con amplitud proporcional a $\rho = A_i/A_c$, independiente de f_i. Pero la amplitud del tono es proporcional a ρf_i en un sistema FM. En consecuencia, la FM es menos vulnerable a la interferencia proveniente de una señal de cocanal que tenga la misma frecuencia portadora, de modo que $f_i \approx 0$, y es más vulnerable a interferencias de un *canal adyacente* ($f_i \neq 0$). La figura 5.4-2

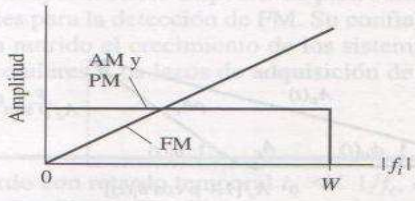


Figura 5.4-2 Amplitud de la interferencia demodulada de una portadora con frecuencia $f_c + f_i$.

ilustra esta diferencia en la forma de un gráfico de amplitud de la interferencia demodulada *versus* $|f_i|$. (El punto de cruce correspondería a $|f_i| = 1$ Hz si las tres constantes de los detectores tuviesen el mismo valor numérico.)

El análisis de la interferencia demodulada se vuelve una tarea mucho más difícil con valores arbitrarios de ρ o bien con portadoras moduladas. Se volverá a este problema después de explorar las implicaciones de la figura 5.4-2.

EJERCICIO 5.4-1

Sea $A_i = A_c$ de modo que $\rho = 1$ en la ecuación (2). Tomar $\phi_i = 0$ y usar identidades trigonométricas para demostrar que

$$A_v(t) = 2A_c\,|\cos(\omega_i t/2)| \qquad \phi_v(t) = \omega_i t/2$$

Luego dibujar la forma de onda de salida demodulada para detección de envolvente, fase y frecuencia suponiendo que $f_i \ll W$.

Filtrado de desénfasis y preénfasis

El hecho de que la interferencia FM detectada sea más severa para valores grandes de f sugiere un método para mejorar el rendimiento del sistema con filtrado selectivo de posdetección, denominado **filtrado de desénfasis**. Suponga que el demodulador es seguido por un filtro pasabajas con una relación de amplitudes que comienza a disminuir gradualmente por debajo de W; esto *desenfatizará* la porción de alta frecuencia de la banda del mensaje y, por ello, reducirá la interferencia más seria. Todavía se requiere un filtro de corte agudo (ideal) para eliminar componentes residuales por encima de W, de manera que el demodulador completo está formado por un detector de frecuencia, un filtro de desénfasis y un filtro pasabajas, como en la figura 5.4-3.

Salta a la vista que el filtrado de desénfasis también atenúa los componentes de alta frecuencia del propio mensaje, ocasionando distorsión de la señal de salida a menos que se tomen medidas correctivas. Pero es bastante sencillo compensar la distorsión de desénfasis mediante la **predistorsión** o **preénfasis** de la señal moduladora en el transmisor antes de la modulación. Las características de los filtros de preénfasis y de desénfasis deben estar relacionadas por

$$H_{pe}(f) = \frac{1}{H_{de}(f)} \qquad |f| \le W \qquad [5]$$

para producir una transmisión neta sin distorsión. En esencia,

Figura 5.4-3 Demodulador FM completo.

Se preenfatiza el mensaje antes de la modulación (donde no hay interferencia) de modo que se pueda desenfatizar la interferencia en relación con el mensaje después de la demodulación.

El filtrado de preénfasis/desénfasis ofrece ventajas potenciales siempre que las contaminaciones indeseadas tiendan a predominar en ciertas partes de la banda del mensaje. Por ejemplo, el sistema *Dolby* para la grabación en cintas ajusta dinámicamente la cantidad de preénfasis/desénfasis en proporción inversa al contenido de alta frecuencia de la señal; para más detalles, véase Stremler (1990, apéndice F). Sin embargo, se gana poco al desenfatizar la modulación de fase o lineal porque la amplitud de la interferencia demodulada no depende de la frecuencia.

El filtro de desénfasis FM usualmente es una red sencilla de primer orden con

$$H_{de}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right]^{-1} \approx \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \dfrac{B_{de}}{jf} & |f| \gg B_{de} \end{cases} \qquad [6]$$

donde el ancho de banda de 3 dB B_{de} es considerablemente menor que el ancho de banda del mensaje W. Puesto que la amplitud de la interferencia aumenta linealmente con $|f_i|$ en la ausencia de filtrado, la respuesta de la interferencia desenfatizada es $|H_{de}(f_i)| \times |f_i|$, como se ilustra en la figura 5.4-4. Obsérvese que, igual que la PM, ésta se hace constante para $|f_i| \gg B_{de}$. Por tanto, la FM puede ser superior a la PM para la interferencia de canal adyacente y de cocanal.

En el lado transmisor, la función del filtro de preénfasis correspondiente debe ser

$$H_{pe}(f) = \left[1 + j\left(\frac{f}{B_{de}}\right)\right] \approx \begin{cases} 1 & |f| \ll B_{de} \\ \dfrac{jf}{B_{de}} & |f| \gg B_{de} \end{cases} \qquad [7]$$

la cual tiene poco efecto sobre las frecuencias más bajas del mensaje. Sin embargo, para frecuencias más altas, el filtro actúa como un *diferenciador* y el espectro de salida es proporcional a $fX(f)$ para $|f| \gg B_{de}$. Pero la diferenciación de una señal antes de la modulación de frecuencia es equivalente a la ¡*modulación de fase*! De aquí que la FM con preénfasis es realmente una combinación de FM y PM, combinando las ventajas de

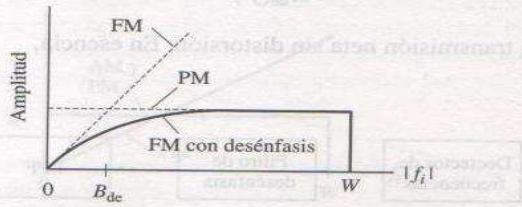


Figura 5.4-4 Amplitud de la interferencia demodulada con filtrado de desénfasis FM.

ambas con respecto a la interferencia. Como podría esperarse, esto resulta ser igualmente efectivo para reducir *ruido*, como se discutirá con más detalle en el capítulo 10.

Con respecto a $H_{pe}(f)$ dada arriba, se ve que la amplitud de la máxima frecuencia moduladora es incrementada por un factor de W/B_{de}, lo que significa que la desviación de frecuencia es aumentada por este mismo factor. Generalmente hablando, la mayor desviación requiere de un mayor ancho de banda del transmisor, de modo que la mejora del preénfasis-desénfasis tiene su precio. Afortunadamente, muchas señales moduladoras, particularmente las señales de audio, tienen relativamente poca energía en el extremo de alta frecuencia de la banda del mensaje, y por tanto las componentes de frecuencias más altas no desarrollan una desviación máxima, y el ancho de banda de transmisión está regido por las componentes inferiores de mayor amplitud. Añadiendo preénfasis a la alta frecuencia tiende a compensar el espectro del mensaje de manera que todas las componentes requieren el mismo ancho de banda. Bajo esta condición, no es necesario incrementar el ancho de banda de transmisión.

EJEMPLO 5.4-1

En la figura 5.4-5 se muestran redes de desénfasis y preénfasis para la FM comercial junto con sus diagramas de Bode. La constante de tiempo RC en ambos circuitos es igual a 75 μs, de modo que $B_{de} = 1/2\pi RC \approx 2.1$ kHz. El filtro de preénfasis tiene una frecuencia de quiebre superior en $f_u = (R + r)/2\pi RrC$, que usualmente se selecciona muy por encima de la banda de audio, digamos $f_u \geq 30$ kHz.

EJERCICIO 5.4-2

Supóngase que una señal de audio es modelada como una suma de tonos con amplitudes de baja frecuencia $A_m \leq 1$ para $f_m \leq 1$ kHz y amplitudes de alta frecuencia $A_m \leq 1$ kHz/f_m para $f_m > 1$ kHz. Use las ecuaciones (1) y (2), sección 5.2, para estimar el ancho de banda requerido para un solo tono en $f_m = 15$ kHz cuya amplitud se ha preenfatizada por el $|H_{pe}(f)|$ dado en la ecuación (7) con $B_{de} = 2$ kHz. Supóngase que $f_\Delta = 75$ kHz y compárese el resultado con $B_T \approx 210$ kHz.

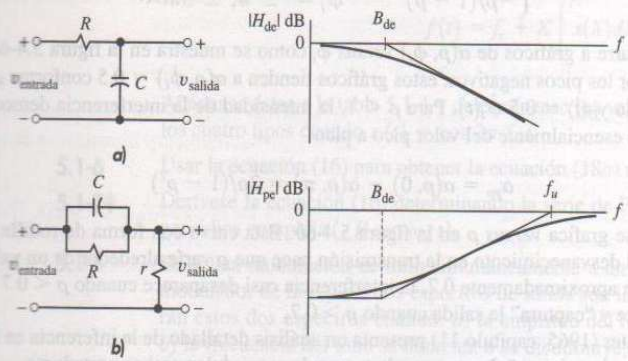


Figura 5.4-5 *a)* Filtro de desénfasis; *b)* filtro de preénfasis.

Efecto de captura en FM★

El **efecto de captura** es un fenómeno que ocurre en sistemas FM cuando dos señales tienen amplitudes casi iguales en el receptor. Pequeñas variaciones de la amplitud relativa ocasionan entonces que la más fuerte de las dos domine la situación, reemplazando repentinamente la otra señal en la salida demodulada. Un radioescucha seguramente ha oído ruidos molestos al escuchar una estación FM lejana.

Para un análisis razonablemente manejable del efecto de captura, se considerará una portadora no modulada con interferencia de cocanal modulada ($f_i = 0$). La fase resultante $\phi_v(t)$ está dada entonces por la ecuación (2) con $\theta_i(t) = \phi_i(t)$, donde $\phi_i(t)$ denota la modulación de fase de la señal interferente. Así, si $K_D = 1$ para simplificar, la señal demodulada se convierte en

$$y_D(t) = \dot{\phi}_v(t) = \frac{d}{dt}\left[\arctan \frac{\rho \operatorname{sen} \phi_i(t)}{1 + \rho \cos \phi_i(t)}\right] \qquad [8a]$$

$$= \alpha(\rho, \phi_i)\, \dot{\phi}_i(t)$$

donde

$$\alpha(\rho,\phi_i) \triangleq \frac{\rho^2 + \rho \cos \phi_i}{1 + \rho^2 + 2\rho \cos \phi_i} \qquad [8b]$$

La presencia de $\dot{\phi}_i(t)$ en la ecuación (8*a*) indica interferencia potencialmente **inteligible** (o **diafonía**) hasta el punto que $\alpha(\rho, \phi_i)$ permanece constante con el tiempo. Después de todo, si $\rho \gg 1$ entonces $\alpha(\rho, \phi_i) \approx 1$ y $y_D(t) \approx \dot{\phi}_i(t)$.

Pero el efecto de captura ocurre cuando $A_i \approx A_c$, de modo que $\rho \approx 1$ y la ecuación (8*b*) no se simplifica de inmediato. Más bien, se observa que

$$\alpha(\rho, \phi_i) = \begin{cases} \rho/(1 + \rho) & \phi_i = 0, \pm 2\pi, \ldots \\ \rho^2/(1 + \rho^2) & \phi_i = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots \\ -\rho/(1 - \rho) & \phi_i = \pm \pi, \pm 3\pi, \ldots \end{cases}$$

y se recurre a gráficos de $\alpha(\rho, \phi_i)$ *versus* ϕ_i como se muestra en la figura 5.4-6*a*. Excepto por los picos negativos, estos gráficos tienden a $\alpha(\rho, \phi_i) = 0.5$ conforme $\rho \to 1$, y por ello $y_D(t) = 0.5\, \dot{\phi}_i(t)$. Para $\rho < 1$, la intensidad de la interferencia demodulada depende esencialmente del valor pico a pico

$$\alpha_{pp} = \alpha(\rho, 0) - \alpha(\rho, \pi) = 2\rho/(1 - \rho^2)$$

el cual se grafica *versus* ρ en la figura 5.4-6*b*. Esta curva con forma de rodilla revela que si el desvanecimiento en la transmisión hace que ρ varíe alrededor de un valor nominal de aproximadamente 0.7, la interferencia casi desaparece cuando $\rho < 0.7$ donde prevalece y "captura" la salida cuando $\rho > 0.7$.

Panter (1965, capítulo 11) presenta un análisis detallado de la inferencia en FM en el cual incluye las señales que resultan cuando se modulan ambas portadoras.

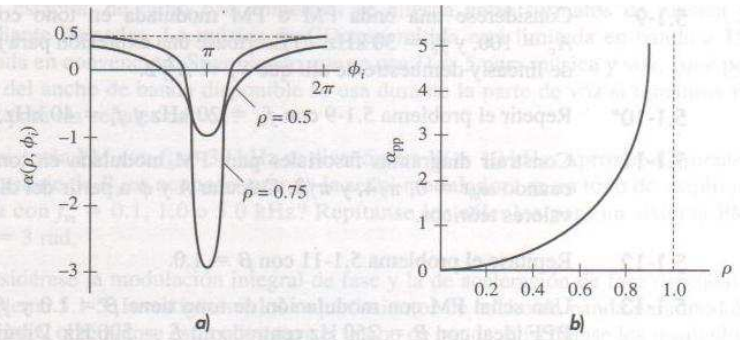


Figura 5.4-6

5.5 PROBLEMAS

5.1-1 Graficar e identificar $\phi(t)$ y $f(t)$ para PM y FM cuando $x(t) = A\Lambda(t/\tau)$. Tome $\phi(-\infty) = 0$ en el caso FM.

5.1-2 Repítase el problema 5.1-1 con $x(t) = A\cos(\pi t/\tau)\Pi(t/2\tau)$.

5.1-3 Repítase el problema 5.1-1 con $x(t) = \dfrac{4At}{t^2 - 16}$ para $t > 4$.

5.1-4* Un generador de barrido de frecuencias produce una salida senoidal cuya frecuencia instantánea aumenta linealmente desde f_1 en $t = 0$ hasta f_2 en $t = T$. Escriba $\theta_c(t)$ para $0 \le t \le T$.

5.1-5 Además de la PM y FM, otras dos formas posibles de la modulación exponencial son la *modulación de la integral de fase*, con $\phi(t) = K\,dx(t)/dt$, y la *modulación de aceleración de fase*, con

$$f(t) = f_c + K\int^t x(\lambda)d\lambda$$

Añádanse éstas a la tabla 5.1-1 y determínense los valores máximos de $\phi(t)$ y $f(t)$ para los cuatro tipos cuando $x(t) = \cos 2\pi f_m t$.

5.1-6 Usar la ecuación (16) para obtener la ecuación (18*a*) a partir de la ecuación (15).

5.1-7‡ Derívese la ecuación (16) determinando la serie de Fourier exponencial de la función periódica compleja ($j\beta$ sen $\omega_m t$).

5.1-8 Se aplica modulación de tono simultáneamente a un modulador de frecuencia y a un modulador de fase y los dos espectros de salida son idénticos. Describir cómo cambiarán estos dos espectros cuando: *a*) la amplitud del tono se aumenta o se disminuye; *b*) la frecuencia del tono se aumenta o se dismimuye; *c*) la amplitud y la frecuencia se aumenta o se dismimuye en la misma proporción.

5.1-9 Considérese una onda FM o PM modulada en tono con $f_m = 10$ kHz, $\beta = 2.0$, $A_c = 100$, y $f_c = 30$ kHz. *a*) Escríbase una expresión para $f(t)$. *b*) Dibújese el espectro de líneas y demuestre de allí que $S_T < A_c^2/2$.

5.1-10* Repetir el problema 5.1-9 con $f_m = 20$ kHz y $f_c = 40$ kHz, en cuyo caso $S_T > A_c^2/2$.

5.1-11 Construir diagramas fasoriales para FM modulada en tono con $A_c = 10$ y $\beta = 0.5$ cuando $\omega_m t = 0, \pi/4$, y $\pi/2$. Calcular A y ϕ a partir del diagrama y comparar con los valores teóricos.

5.1-12 Repítase el problema 5.1-11 con $\beta = 1.0$.

5.1-13 Una señal FM con modulación de tono tiene $\beta = 1.0$ y $f_m = 100$ Hz se aplica a un BPF ideal con $B = 250$ Hz centrado en $f_c = 500$ Hz. Dibújese el espectro de líneas, el diagrama fasorial y la envolvente de la señal de salida.

5.1-14 Repítase el problema 5.1-13 con $\beta = 5.0$.

5.1-15 Una realización de un sintetizador de música explota la estructura armónica de la modulación de tono FM. La nota del violín C_2 tiene una frecuencia de $f_0 = 405$ Hz con armónicos en múltiplos enteros de f_0 cuando se toca con un arco. Constrúyase un sistema usando modulación de tono FM y convertidores de frecuencia para sintetizar esta nota con f_0 y tres armónicos.

5.1-16‡ Considérese FM con modulación de onda cuadrada periódica definida por $x(t) = 1$ para $0 < t < T_0/2$ y $x(t) = -1$ para $-T_0/2 < t < 0$. *a*) Tomar $\phi(0) = 0$ y graficar $\phi(t)$ para $-T_0/2 < t < T_0/2$. Entonces usar la ecuación (20*a*) para obtener

$$c_n = \frac{1}{2}e^{j\pi\beta}\left[\text{sinc}\left(\frac{n+\beta}{2}\right)e^{j\pi n/2} + \text{sinc}\left(\frac{n-\beta}{2}\right)e^{-j\pi n/2}\right]$$

donde $\beta = fT_0$. *b*) Grafíquese el espectro de líneas de la magnitud resultante cuando β es un entero grande.

5.2-1 Un mensaje tiene $W = 15$ kHz. Estímese el ancho de banda de transmisión FM para $f_\Delta = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 50, 100$ y 500 kHz.

5.2-2 Repítase el problema 5.2-1 con $W = 5$ kHz.

5.2-3 Un sistema FM tiene $f_\Delta = 10$ kHz. Usar la tabla 9.4-1 y la figura 5.2-1 para estimar el ancho de banda para: *a*) transmisión de voz apenas inteligible; *b*) transmisión de voz de calidad telefónica; transmisión de audio de alta fidelidad.

5.2-4 Una señal de video con $W = 5$ MHz se transmitirá vía FM con $f_\Delta = 25$ MHz. Hallar la mínima frecuencia portadora consistente con consideraciones de ancho de banda fraccionario. Comparar sus resultados con la transmisión vía modulación de amplitud DSB.

5.2-5* Unos audífonos nuevos inalámbricos usan transmisión FM infrarroja y tienen una respuesta de frecuencia de 30 a 15 000 Hz. Hallar B_T y f_Δ consistente con consideraciones de ancho de banda fraccionaria, suponiendo que $f_c = 5 \times 10^{14}$ Hz.

5.2-6 Una estación de radio FM comercial se alterna entre formatos de música y voz mediante llamadas. La música de CD transmitida está limitada en banda a 15 kHz basada en convención. Suponiendo que se usa $D = 5$ para música y voz, ¿qué porcentaje del ancho de banda disponible se usa durante la parte de voz si tomamos $W = 5$ kHz para las señales de voz?

5.2-7 Un sistema FM con $f_\Delta = 30$ kHz se diseñó para $W = 10$ kHz. Aproximadamente ¿qué porcentaje de B_T es ocupado cuando la señal moduladora es un tono de amplitud unitaria con $f_m = 0.1$, 1.0 o 5.0 kHz? Repítanse los cálculos para un sistema PM con $\phi_\Delta = 3$ rad.

5.2-8 Considérese la modulación integral de fase y la de aceleración de fase definidas en el problema 5.1-5. Investíguense los requerimientos de ancho de banda para modulación de tono y obténganse estimados para el ancho de banda. Discútanse los resultados.

5.2-9* La función de transferencia de un BPF de sintonía única es $H(f) \approx 1/[1 + j2Q(f - f_c)/f_c]$ en la pasabanda de frecuencias positivas. Usar la ecuación (10) para obtener una expresión para la señal de salida y su fase instantánea cuando la entrada es una señal NBPM.

5.2-10 Usar la ecuación (10) para obtener una expresión para la señal de salida y su amplitud cuando una señal FM sufre una distorsión por un sistema con $H(f) = K_0 - K_3(f - f_c)^3$ en la pasabanda de frecuencias positivas.

5.2-11 Usar la ecuación (13) para obtener una expresión para la señal de salida y su frecuencia instantánea cuando una señal FM sufre una distorsión por un sistema con $|H(f)| = 1$ y arg $H(f) = \alpha_1(f - f_c) + \alpha_3(f - f_c)^3$ en la pasabanda de frecuencias positivas.

5.2-12 Una señal FM se aplica al BPF en el problema 5.2-9. Sea $\alpha = 2Qf_\Delta/f_c \ll 1$ y usar la ecuación (13) para obtener una expresión aproximada de la señal de salida y su frecuencia instantánea.

5.2-13 Supóngase que la entrada al sistema en la figura 5.2-6*a* es una señal FM con $D = f_\Delta/W$ y variaciones de amplitud falsas. Dibújese el espectro en la salida del limitador y muéstrese que una operación exitosa requiere que $f_\Delta < (f_c - W)/2$.

5.2-14 La entrada al sistema en la figura 5.2-6*b* es una señal FM con $D = f_\Delta/W$ y la BPF está centrada en $3f_c$, correspondiente a un triplicador de frecuencia. Dibújese el espectro en la entrada del filtro y obtenga una condición en f_Δ en términos de f_c y W que asegure el éxito de la operación.

5.2-15* Repetir el problema 5.2-14 con el BPF centrado en $4f_c$, correspondiente a un cuadruplicador de frecuencias.

5.3-1 La capacitancia de sintonización equivalente en la figura 5.3-1 es $C(t) = C_1 + C_v(t)$ donde $C_v(t) = C_2/\sqrt{V_B + x(t)/N}$. Demuéstrese que $C(t) \approx C_0 - C_x(t)$ con un 1 por ciento de precisión si $NV_B \geq 300/4$. Después, demuéstrese que la limitación correspondiente sobre la desviación de frecuencia es $f_\Delta < f_c/300$.

5.3-2 El generador de FM directa en la figura 5.3-2 se usa para un carrito de juguete de control remoto. Hallar la banda de valores permitidos para W de modo que B_T satisfaga los requerimientos del ancho de banda fraccional, suponiendo que se usa la desviación de frecuencia máxima de 150 kHz.

5.3-3 Confirmar que $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ es una solución de la ecuación integrodiferencial $\dot{x}_c(t) = -\dot{\theta}_c(t) \int \dot{\theta}_c(t)\, x_c(t)\, dt$. Dibujar después el diagrama de bloques de un generador de FM directa basado en esta relación.

5.3-4 Supóngase que un detector FM recibe la señal transmitida que fue generada por el modulador de fase en la figura 5.3-3. Descríbase la distorsión en la señal del mensaje de salida. (Sugerencia: considérese la relación entre la amplitud y la frecuencia de la señal del mensaje, así como el índice de modulación.)

5.3-5* Una señal de un mensaje de audio se transmite usando una modulación de frecuencia. Describir la distorsión en el mensaje de salida si es recibida por un detector PM. (Sugerencia: considerar la relación entre la amplitud y la frecuencia de la señal del mensaje, así como el índice de modulación.)

5.3-6 Diseñar un sistema inalámbrico para cornetas estéreo usando FM indirecta. Suponiendo que $W = 15$ kHz, $D = 5, f_{c1} = 500$ kHz, $f_c = 915$ MHz y $\phi_\Delta/2\pi T < 20$, determinar el número de triplicadores necesarios en su etapa del multiplicador y hallar el valor de f_{OL} necesaria para diseñar su sistema.

5.3-7 La porción de audio de un transmisor de televisión es un sistema FM indirecto con $W = 10$ kHz, $D = 2.5$ y $f_c = 4.5$ MHz. Diseñar un diagrama de bloques de este sistema con $\phi_\Delta/2\pi T < 20$ Hz y $f_c = 200$ kHz. Usar la cadena de multiplicadores más corta posible formada por triplicadores y duplicadores y colocar el convertidor hacia abajo de modo que ninguna frecuencia exceda 100 MHz.

5.3-8 Una señal con $W = 4$ kHz se transmite usando FM indirecta con $f_c = 1$ MHz y $f_\Delta = 12$ kHz. Si $\phi_\Delta/2\pi T < 100$ y $f_{c1} = 10$ kHz, ¿cuántos duplicadores serán necesarios para obtener los parámetros de salida deseados? Dibújese el diagrama de bloques del sistema indicando el valor y situación del oscilador local de modo que ninguna frecuencia exceda los 10 MHz.

5.3-9 Supóngase que el modulador de fase en la figura 5.3-5 es realizado como en la figura 5.3-3. Tómese $x(t) = A_m \cos \omega_m t$ y sea $\beta = (\phi_\Delta/2\pi T)(A_m/f_m)$. *a*) Demuéstrese que si $\beta \ll 1$, entonces

$$f_1(t) \approx f_c + \beta f_m[\cos \omega_m t + (\beta/2)^2 \cos 3\omega_m t]$$

b) Obténgase una condición sobre $\phi_\Delta/2\pi T$ de modo que la distorsión del tercer armónico no exceda de 1 por ciento cuando $A_m \leq 1$ y 30 Hz $\leq f_m \leq 15$ kHz, igual que en la radiodifusión de FM.

5.3-10 Supóngase que la entrada a la figura 5.3-7*a* es una señal FM con $f_\Delta \ll f_c$ y también que el diferenciador es realizado por un circuito sintonizado con $H(f) = 1/[1 + j(2Q/f_0)(f - f_0)]$ para $f \approx f_0$. Úsese el método cuasiestático para demostrar que $y_D(t) \approx K_D f_\Delta x(t)$ cuando $f_0 = f_c + b$ siempre que $f_\Delta \ll b \ll f_0/2Q$.

5.3-11* Supóngase que la entrada a la figura 5.3-7*a* es una señal FM con $f_\Delta \ll f_c$ y también que el diferenciador es implementado por un filtro pasabajas de primer orden con $B = f_c$. Úsese el análisis cuasiestático para demostrar que $y_D(t) \approx -K_1 f_\Delta x(t) + K_2 f_\Delta^2 x^2(t)$. Después tómese $x(t) = \cos \omega_m t$ y obténgase una condición sobre f_Δ/f_c de modo que la distorsión del segundo armónico sea menor que 1%.

5.3-12 Los circuitos sintonizados en la figura 5.3-8*b* tienen funciones de transferencia de la forma $H(f) = 1/[1 + j(2Q/f_0)(f - f_0]$ para $f \approx f_0$). Supóngase que las dos frecuencias centrales son $f_0 = f_c \pm b$ con $f_\Delta \leq b \ll f_c$. Úsese el análisis cuasiestático para demostrar que si ambos circuitos tienen $(2Q/f_0)b = \alpha \ll 1$, entonces $y_D(t) \approx K_1 x(t) - K_3 x^3(t)$ donde $K_3/K_1 \ll 1$.

5.4-1 Obténgase una expresión aproximada para la salida de un demodulador de amplitud cuando la entrada es una señal AM con 100 por ciento de modulación más una señal interferente $A_i[1 + x_i(t)] \cos [(\omega_c + \omega_i)t + \phi_i]$ con $\rho = A_i/A_c \ll 1$. ¿Es inteligible la interferencia demodulada?

5.4-2 Obténgase una expresión aproximada para la salida de un demodulador de fase cuando la entrada es una señal NBPM con 100 por ciento de modulación más una señal interferente $A_i \cos [(\omega_c + \omega_i)t + \phi_i(t)]$ con $\rho = A_i/A_c \ll 1$. ¿Es inteligible la interferencia demodulada?

5.4-3 Investigar el rendimiento de la detección de envolvente *versus* la detección sincrónica de la AM en presencia de propagación por multitrayectorias, tal que $v(t) = x_c(t) + \alpha x_c(t - t_d)$ con $\alpha^2 < 1$. Considerar los casos especiales $\omega_c t_d \approx \pi/2$ y $\omega_c t_d \approx \pi$.

5.4-4 Una persona está hablando por un teléfono inalámbrico, el cual usa modulación de amplitud, cuando alguien enciende un artefacto motorizado produciendo estática en el teléfono. La persona cambia a otro teléfono inalámbrico FM nuevo y la llamada es clara, sin interferencia. Explicar por qué sucede esto.

5.4-5* En la Segunda Guerra Mundial se usó primero preénfasis/desénfasis en la modulación de amplitud para las comunicaciones móviles a fin de hacer más inteligible la parte de alta frecuencia de las señales de voz. Suponiendo que la amplitud del espectro de voz está limitado en banda a 3.5 kHz y cae a aproximadamente 6 dB por década (factor de 10 en una escala de frecuencia logarítmica) por encima de 500 Hz, dibujar los diagramas de Bode de los filtros de preénfasis y de desénfasis de modo que la señal del mensaje tenga un espectro plano antes de la transmisión. Discutir el impacto sobre la potencia transmitida para la DSB contra la AM estándar con $\mu = 1$.

5.4-6 Los filtros de preénfasis se usan también en aplicaciones de ayudas auditivas. Supóngase que un niño tiene una pérdida de audición que empeora en las frecuencias altas. Un filtro de preénfasis se diseña para que sea el inverso aproximado del desénfasis de alta frecuencia que ocurre en el oído. En un salón de clases ruidoso, con frecuencia es útil tener un maestro que hable con un micrófono y que la señal se transmita mediante FM a un receptor que porta el niño. ¿Es mejor tener el filtro de preénfasis en el extremo del micrófono antes de la transmisión FM o en el receptor usado por el niño? Coméntese la respuesta en términos de la potencia transmitida, ancho de banda transmitido y la susceptibilidad a la interferencia.

5.4-7 Una señal de mensaje $x(t)$ tiene un espectro de energía o de potencia que satisface la condición

$$G_x(f) \leq (B_{de}/f)^2 G_{máx} \qquad |f| > B_{de}$$

donde $G_{máx}$ es el máximo de $G_x(f)$ en $|f| < B_{de}$. Si el filtro de preénfasis en la ecuación (7) se aplica a $x(t)$ antes de la transmisión FM, ¿aumentará el ancho de banda transmitido?

5.4-8 La ecuación (8) también es válida para el caso de interferencia no modulada en canales adyacentes si tomamos $\phi_i(t) = \omega_i t$. Dibujar la forma de onda demodulada resultante cuando $\rho = 0.4$, 0.8 y 1.2.

5.4-9 Si la amplitud de una senoidal interferente y la amplitud de la senoidal de interés son aproximadamente iguales, $\rho = A_i/A_c \approx 1$ y la ecuación (8*b*) parece reducirse a $\alpha(\rho, \phi_i) = 1/2$ para toda ϕ_i, resultando en diafonía. Sin embargo, aparecerán grandes picos en la salida del demodulador cuando $\phi_i = \pm\pi$. Demuéstrese que si $\phi_i = \pi$ y $\rho = 1 \pm \epsilon$, entonces $\alpha(\rho, \pi) \to \pm\infty$ conforme $\epsilon \to 0$. Inversamente, demuéstrese que si ρ es ligeramente menor que 1 y $\phi_i = \pi \pm \epsilon$, entonces $\alpha(\rho, \phi_i) \to -\infty$ conforme $\epsilon \to 0$.

5.4-10‡* Desarrollar una expresión para la señal demodulada cuando una señal FM con fase instantánea $\phi(t)$ tiene interferencia proveniente de una portadora no modulada en un canal adyacente. Escribir el resultado en función de $\phi(t)$, $\rho = A/A_c$ y $\theta_i(t) = \omega_i t + \phi_i$.

capítulo

6

Muestreo y modulación de pulsos

RESUMEN DEL CAPÍTULO

6.1 **Teoría y práctica del muestreo**

Muestreo con cortador Muestreo ideal y reconstrucción Muestreo práctico y alias de frecuencia

6.2 **Modulación de amplitud de pulsos**

Muestreo de tope plano y PAM

6.3 **Modulación del tiempo de los pulsos**

Modulación de la duración y de la posición de los pulsos Análisis espectral de la PPM★

Los datos experimentales y las funciones matemáticas suelen mostrarse como curvas *continuas*, aun cuando se haya usado un número finito de *puntos discretos* para construir los gráficos. Si estos puntos, o *muestras*, están lo suficientemente cercanos, una curva suave que los una permitiría interpolar valores intermedios con cualquier grado razonable de precisión. Por ello, es posible decir que la curva continua está descrita adecuadamente sólo por los puntos de muestra.

De manera semejante, una *señal* eléctrica que cumpla con ciertos requerimientos puede reproducirse a partir de un conjunto apropiado de *muestras instantáneas*. Por tanto, el muestreo ofrece la posibilidad de transmitir un mensaje en forma de *pulsos modulados*, y no como una señal continua. Usualmente los pulsos son bastante cortos comparados con el tiempo entre ellos, de modo que una onda de pulsos modulados tiene la propiedad de estar "apagada" la mayor parte del tiempo.

Esta propiedad de la modulación de pulsos tiene dos ventajas potenciales sobre la modulación de OC. En primer lugar, la potencia transmitida se concentra en ráfagas cortas en vez de generarse continuamente. El diseñador del sistema tiene entonces mayor libertad para seleccionar el equipo y puede escoger dispositivos tales como láseres o tubos de microondas de alta potencia que operan solamente con base en pulsos. En segundo lugar, el intervalo de tiempo entre pulsos se ocupa con valores de muestras de otras señales, un proceso denominado *multiplexaje por división de tiempo* (TDM).

Sin embargo, la modulación de pulsos tiene la desventaja de que requiere un ancho de banda de transmisión muy grande en comparación con el ancho de banda del mensaje. En consecuencia, los métodos de modulación *analógica* de pulsos discutidos en este capítulo se usan principalmente como *procesamiento del mensaje* para TDM o antes de la modulación de OC. La modulación de pulsos *digital* o *codificada* posee ventajas adicionales que compensan el hecho de que haya un incremento en el ancho de banda, como se verá en el capítulo 12.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, usted será capaz de hacer lo siguiente:

1. Dibujar el espectro de una señal muestreada (sección 6.1).
2. Definir la frecuencia de muestreo mínima para representar adecuadamente una señal dados el valor máximo del error por alias de frecuencia, el ancho de banda del mensaje, las características del LPF, etcétera (sección 6.1).
3. Saber lo que significa la *tasa de Nyquist* y dónde es aplicable (sección 6.1).
4. Describir las implicaciones del muestreo práctico *versus* el muestreo ideal (sección 6.1).
5. Reconstruir una señal a partir de sus muestras usando un LPF ideal (sección 6.1).
6. Explicar la operación de la modulación de amplitud de pulsos, de la modulación de la duración de los pulsos y de la modulación de la posición de los pulsos; dibujar sus formas de onda en el dominio del tiempo y calcular sus anchos de banda respectivos (secciones 6.2 y 6.3).

6.1 TEORÍA Y PRÁCTICA DEL MUESTREO

La teoría del muestreo que se presenta aquí establece tanto las condiciones para el muestreo como la reconstrucción de señales a partir de los valores de sus muestras. Asimismo, se examina la implementación práctica de la teoría y algunas aplicaciones relacionadas con ella.

Muestreo con cortador

Un enfoque sencillo pero que ofrece mucha información a la teoría del muestreo proviene de la operación de muestreo en la figura 6.1-1*a*. El conmutador se alterna periódicamente entre dos contactos con una frecuencia de $f_s = 1/T_s$ Hz, manteniéndose en

contacto con la señal de entrada por τ segundos y con el contacto de tierra por el resto del periodo. La salida $x_s(t)$ está integrada por segmentos cortos de la entrada $x(t)$, como se muestra en la figura 6.1-1*b*. La figura 6.1-1*c* is es una versión electrónica de la figura 6.1-1*a*; el voltaje de salida es igual al voltaje de entrada excepto cuando la señal del reloj polariza en directa los diodos y fija en cero el voltaje de salida. Esta operación, denominada *corte de un solo lado* o **corte unipolar**, no es, en sentido estricto, un muestreo instantáneo. No obstante, $x_s(t)$ se designará como la onda muestreada y f_s como la frecuencia de muestreo.

La pregunta es: ¿son suficientes los segmentos muestreados para describir la señal de entrada original y, si lo son, cómo se puede recuperar $x(t)$ a partir de $x_s(t)$? La respuesta a esta pregunta está en el dominio de la frecuencia, en el espectro de la onda muestreada.

Como primer paso para hallar el espectro, se introduce una **función de conmutación** $s(t)$ tal que

$$x_s(t) = x(t)s(t) \qquad [1]$$

Así que la operación de muestreo se convierte en la multiplicación por $s(t)$, como se indica esquemáticamente en la figura 6.1-2*a*, donde $s(t)$ no es sino el tren de pulsos periódicos de la figura 6.1-2*b*. Puesto que $s(t)$ es periódica, se puede expresar como una serie de Fourier. Usando los resultados del ejemplo 2.1-1, se tiene

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s \tau \operatorname{sinc} nf_s\tau \, e^{j2\pi nf_s t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos n\omega_s t \qquad [2]$$

donde

$$c_n = f_s \tau \operatorname{sinc} nf_s\tau \qquad \omega_s = 2\pi f_s$$

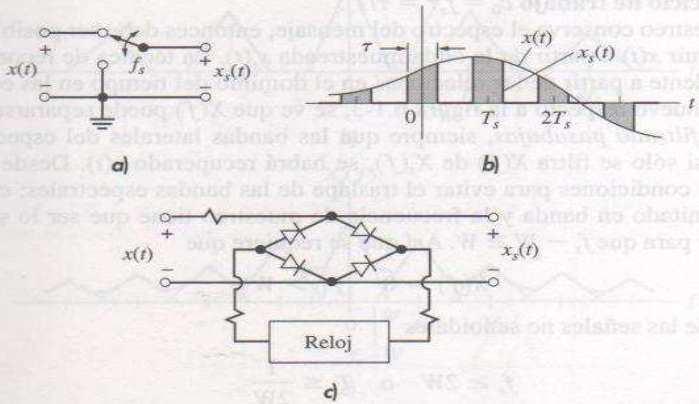


Figura 6.1-1 Muestreador de conmutación. *a*) Diagrama funcional; *b*) formas de ondas; *c*) circuito con puente de diodos.

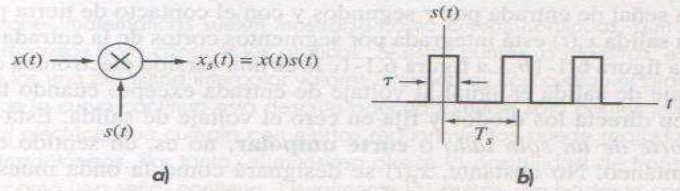


Figura 6.1-2 El muestreo como multiplicación. *a*) Diagrama funcional; *b*) función de conmutación.

Combinando las ecuaciones (2) y (1) produce la expansión

$$x_s(t) = c_0\, x(t) + 2c_1\, x(t) \cos \omega_s t + 2c_2\, x(t) \cos 2\omega_c t + \cdots \qquad [3]$$

Entonces, si el espectro del mensaje de entrada es $X(f) = \mathcal{F}[x(t)]$, el espectro de salida es

$$\begin{aligned} X_s(f) = {} & c_0 X(f) + c_1[X(f - f_s) + X(f + f_s)] \\ & + c_2[X(f - 2f_s) + X(f + 2f_s)] \\ & + \cdots \end{aligned} \qquad [4]$$

la cual se deduce directamente del teorema de modulación.

Aunque la ecuación (4) parece algo complicada, el espectro de la onda muestreada se gráfica fácilmente si se supone que la señal de entrada está *limitada en banda*. La figura 6.1-3 muestra una $X(f)$ conveniente y la $X_s(f)$ correspondiente para dos casos, $f_s > 2W$ y $f_s < 2W$. La figura revela algo en verdad sorprendente: la operación de muestreo ha dejado *intacto* el espectro del mensaje, simplemente repitiéndolo periódicamente en el dominio de la frecuencia con una separación igual a f_s. También se observa que el primer término de la ecuación (4) es precisamente el espectro del mensaje, atenuado por el **ciclo de trabajo** $c_0 = f_s\tau = \tau/T_s$.

Si el muestreo conserva el espectro del mensaje, entonces debe ser posible recuperar o reconstruir $x(t)$ a partir de la onda muestreada $x_s(t)$. La técnica de reconstrucción no es tan evidente a partir de las relaciones en el dominio del tiempo en las ecuaciones (1) y (3). De nuevo respecto a la figura 6.1-3, se ve que $X(f)$ puede separarse de $X_s(f)$ mediante un *filtrado pasabajas*, siempre que las bandas laterales del espectro no se traslapen. Y si sólo se filtra $X(f)$ de $X_s(f)$, se habrá recuperado $x(t)$. Desde luego, se necesitan dos condiciones para evitar el traslape de las bandas espectrales: el mensaje debe estar limitado en banda y la frecuencia de muestreo tiene que ser lo suficientemente grande para que $f_s - W \geq W$. Así que se requiere que

$$X(f) = 0 \quad |f| > W$$

y en el caso de las señales no senoidales

$$f_s \geq 2W \quad \text{o} \quad T_s \leq \frac{1}{2W} \qquad [5a]$$

Si la señal muestreada es senoidal, su espectro de frecuencias constará de impulsos y no se cumplirá la igualdad de la ecuación (5*a*) , y por ello se requiere que

$$f_s > 2W \quad \text{o} \quad T_s < \frac{1}{2W} \qquad \text{(señales senoidales)} \qquad [5b]$$

La frecuencia mínima de muestreo $f_{s_{min}} = 2W$, o en el caso de señales senoidales $f_{s_{min}} = 2W^+$, se conoce como **frecuencia** o **tasa de Nyquist**. Cuando se satisface la ecuación (5) y $x_s(t)$ es filtrada por un LPF (filtro pasabajas) ideal, la señal de salida será proporcional a $x(t)$; en consecuencia, se ha obtenido la reconstrucción del mensaje a partir de la señal muestreada. El valor exacto del ancho de banda B del filtro no es importante siempre que

$$W < B < f_s - W \qquad [6]$$

de modo que el filtro deja pasar $X(f)$ y rechaza todos las componentes más altas en la figura 6.1-3*b*. El muestreo con $f_s > 2W$ crea una *banda de guarda* en la cual se puede acomodar la región de transición de un LPF práctico.

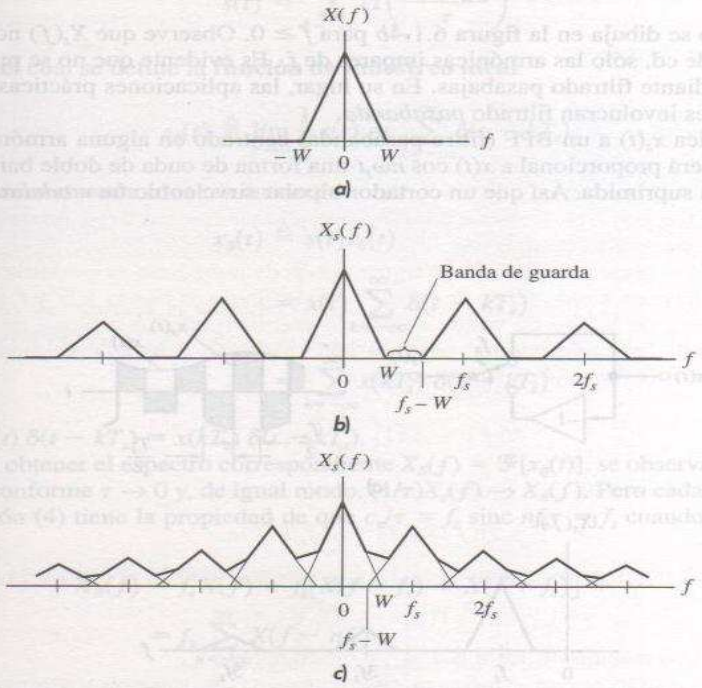


Figura 6.1-3 Espectros para el muestreo de conmutación. *a*) Mensaje; *b*) mensaje muestreado, $f_s > 2W$; *c*) mensaje muestreado, $f_s < 2W$.

Este análisis demuestra que si una señal limitada en banda es muestreada con una frecuencia mayor que la de Nyquist, dicha señal puede reconstruirse *completamente* a partir de la onda muestreada. La reconstrucción se obtiene mediante filtrado pasabajas. Estas conclusiones pueden ser difíciles de aceptar a primera vista, y sin duda ponen a prueba nuestra fe en el análisis espectral. Empero, son bastante correctas.

Finalmente, debe señalarse que nuestros resultados son independientes de la duración del pulso de muestreo, excepto por su aparición en el ciclo de trabajo. Si τ se hace muy pequeño, $x_s(t)$ tiende a ser una secuencia de *puntos de muestra instantáneos*, que corresponden al *muestreo ideal*. Se continuará ahora con la teoría del muestreo ideal, luego de un breve vistazo del **cortador bipolar**, que tiene $\tau = T_s/2$.

EJEMPLO 6.1-1 **Cortadores bipolares**

La figura 6.1-4*a* ilustra el circuito y las formas de ondas para un cortador bipolar. La función de conmutación equivalente es una *onda cuadrada* que se alterna entre $s(t) = +1$ y -1. De la expansión en serie de $s(t)$ se obtiene

$$x_s(t) = \frac{4}{\pi}x(t)\cos\omega_s t - \frac{4}{3\pi}x(t)\cos 3\omega_s t + \frac{4}{5\pi}x(t)\cos 5\omega_s t - \cdots \qquad [7]$$

cuyo espectro se dibuja en la figura 6.1-4*b* para $f \geq 0$. Observe que $X_s(f)$ no contiene componente de cd, sólo las armónicas impares de f_s. Es evidente que no se puede recuperar $x(t)$ mediante filtrado pasabajas. En su lugar, las aplicaciones prácticas de cortadores bipolares involucran filtrado *pasabanda*.

Si se aplica $x_s(t)$ a un BPF (filtro pasabanda) centrado en alguna armónica impar nf_s, la salida será proporcional a $x(t)\cos n\omega_s t$ una forma de onda de doble banda lateral con portadora suprimida. Así que un cortador bipolar sirve como un *modulador balan-*

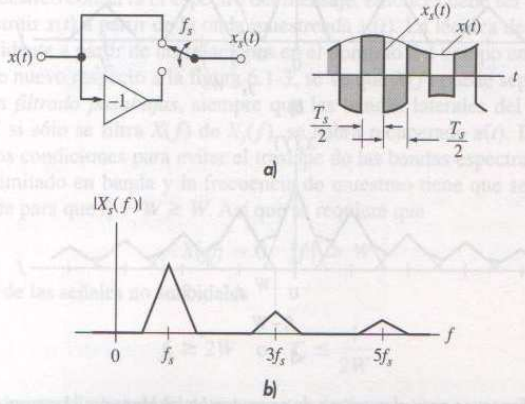


Figura 6.1-4 Cortador bipolar. *a*) Circuito y formas de ondas; *b*) espectro.

cuado. También sirve como un *detector síncrono* cuando la entrada es una señal de DSB o de SSB y la salida se filtra con un pasabajas. Estas propiedades se combinan en el **amplificador cortador estabilizado**, que posibilita la amplificación de cd y de bajas frecuencias usando un amplificador de ca de alta ganancia. Adicionalmente, el problema 6.1-4 indica cómo se puede modificar un cortador bipolar para producir la señal multiplexada de banda base para la FM estéreo.

Muestreo ideal y reconstrucción

Por definición, el muestreo ideal es el muestreo *instantáneo*. El dispositivo de conmutación de la figura 6.1-1*a* produce valores instantáneos solamente si $\tau \to 0$; pero entonces $f_s\tau \to 0$, y también $x_s(t)$. Conceptualmente, esta dificultad se supera multiplicando $x_s(t)$ por $1/\tau$ de modo que, conforme $\tau \to 0$ y $1/\tau \to \infty$, la onda muestreada se convierte en un tren de *impulsos* cuyas *áreas* son iguales a los valores instantáneos de las muestras de la señal de entrada. Formalmente, el tren de pulsos rectangulares se escribe como

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right)$$

a partir del cual se define la **función de muestreo ideal**

$$s_\delta(t) \triangleq \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \qquad [8]$$

La **onda muestreada ideal** es entonces

$$x_\delta(t) \triangleq x(t)s_\delta(t) \qquad [9a]$$

$$= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\, \delta(t - kT_s) \qquad [9b]$$

ya que $x(t)\,\delta(t - kT_s) = x(kT_s)\,\delta(t - kT_s)$.

Para obtener el espectro correspondiente $X_\delta(f) = \mathcal{F}[x_\delta(t)]$, se observa que $(1/\tau)x_s(t) \to x_\delta(t)$ conforme $\tau \to 0$ y, de igual modo, $(1/\tau)X_s(f) \to X_\delta(f)$. Pero cada coeficiente en la ecuación (4) tiene la propiedad de que $c_n/\tau = f_s$ sinc $nf_s\tau = f_s$ cuando $\tau = 0$. Por lo tanto,

$$X_\delta(f) = f_s X(f) + f_s[X(f - f_s) + X(f + f_s)] + \cdots$$

$$= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \qquad [10]$$

que se ilustra en la figura 6.1-5 para el espectro del mensaje de la figura 6.1-3*a* usando $f_s > 2W$. Se ve que $X_\delta(f)$ es periódica en frecuencia con periodo f_s, una observación decisiva en el estudio de sistemas de datos muestreados.

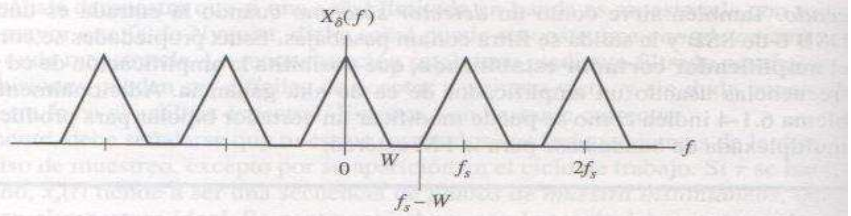


Figura 6.1-5 Espectro de mensaje muestreado idealmente.

También es factible desarrollar una expresión para $S_\delta(f) = \mathcal{F}[s_\delta(t)]$ en la forma siguiente. De la ecuación (9*a*) y el teorema de convolución, $X_\delta(f) = X(f) * S_\delta(f)$, mientras que la ecuación (10) es equivalente a

$$X_\delta(f) = X(f) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_s\, \delta(f - nf_s)\right]$$

Por tanto, se concluye que

$$S_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \qquad [11]$$

de manera que el espectro de una secuencia periódica de impulsos unitarios en el dominio del tiempo es una secuencia periódica de impulsos en el dominio de la frecuencia con separación $f_s = 1/T_s$; en ambas dominios se tiene una función cuya apariencia es la de una cercado de estacas puntiaguda.

Regresando al tema principal y a la figura 6.1-5, de inmediato es evidente que si se consideran las mismas condiciones de antes —$x(t)$ limitada en banda a W y $f_s \geq 2W$—, entonces un filtro de ancho de banda adecuado reconstruirá $x(t)$ a partir de la onda muestreada ideal. Específicamente, para un LPF ideal de ganancia K, retardo t_d, y ancho de banda B, la función de transferencia es

$$H(f) = K\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-j\omega t_d}$$

de modo que el filtrado de $x_\delta(t)$ produce el espectro de salida

$$Y(f) = H(f)X_\delta(f) = Kf_s X(f)e^{-j\omega t_d}$$

asumiendo que B satisface la ecuación (6). La función de salida en el tiempo es entonces

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(f)] = Kf_s x(t - t_d) \qquad [12]$$

que es la señal original amplificada por Kf_s y retardada por t_d.

Es posible lograr mayor confianza en el proceso de muestreo examinando la reconstrucción en el dominio del tiempo. La respuesta al impulso del LPF es

$$h(t) = 2BK \text{ sinc } 2B(t - t_d)$$

como la entrada $x_\delta(t)$ es un tren de impulsos ponderados, la salida es un tren de *respuestas al impulso* ponderadas, a saber,

$$y(t) = h(t) * x_\delta(t) = \sum_k x(kT_s)h(t - kT_s) \qquad [13]$$

$$= 2BK \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{ sinc } 2B(t - t_d - kT_s)$$

Supóngase ahora para simplificar que $B = f_s/2$, $K = 1/f_s$, y $t_d = 0$, de modo que

$$y(t) = \sum_k x(kT_s) \text{ sinc } (f_s t - k)$$

Se puede llevar a cabo el proceso de reconstrucción gráficamente, como se muestra en la figura 6.1-6. Evidentemente, los valores correctos se reconstruyen en los instantes de muestreo $t = kT_s$, ya que todas las funciones sinc son iguales a cero en estos instantes, excepto una, y ésa produce $x(kT_s)$. Entre los instantes de muestreo se *interpola* $x(t)$ sumando los precursores y poscursores de *todas* las funciones sinc. Por esta razón a menudo el LPF se conoce como **filtro de interpolación**, y su impulso, la **función de interpolación**.

Los resultados anteriores se resumen expresando el importante teorema del **muestreo uniforme (periódico)**. Aunque hay muchas variantes de este teorema, la forma siguiente es la más adecuada para nuestros propósitos.

> Si una señal no contiene componentes de frecuencia para $|f| \geq W$, se describe completamente mediante valores de muestra instantáneos uniformemente espaciados en el tiempo con periodo $T_s \leq 1/2W$. Si una señal se ha muestreado con la tasa de Nyquist o mayor ($f_s \geq 2W$) y los valores de las muestras se representan como impulsos ponderados, la señal puede reconstruirse exactamente a partir de sus muestras mediante un LPF ideal de ancho de banda B, donde $W \leq B \leq f_s - W$.

Otra forma de expresar el teorema deriva de las ecuaciones (12) y (13) con $K = T_s$ y $t_d = 0$. Entonces $y(t) = x(t)$ y

$$x(t) = 2BT_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{ sinc } 2B(t - kT_s) \qquad [14]$$

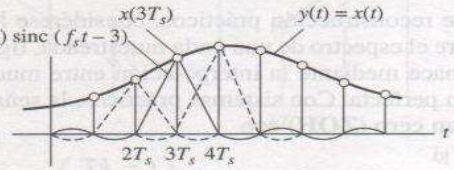


Figura 6.1-6 Reconstrucción ideal.

siempre que $T_s \leq 1/2W$ y que B satisfaga la ecuación (6). Por tanto, en la misma forma en que una señal periódica se describe completamente mediante los coeficientes de su serie de Fourier, una señal de banda limitada es descrita por completo por sus valores de muestra instantáneos *aun cuando la señal sea realmente muestreada o no*.

EJERCICIO 6.1-1 Considérese un tren de pulsos de muestreo de la forma general

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(t - kT_s) \qquad [15a]$$

cuya forma del pulso $p(t)$ es igual a cero para $|t| > T_s/2$, pero es arbitraria en cualquier otro caso. Úsese una serie exponencial de Fourier y la ecuación (21), sección. 2.2, para demostrar que

$$S_p(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nf_s)\, \delta(f - nf_s) \qquad [15b]$$

donde $P(f) = \mathcal{F}[p(t)]$. Entonces hágase $p(t) = \delta(t)$ para obtener la ecuación (11).

Muestreo práctico y alias de frecuencia

Los sistemas de muestreo práctico difieren del muestreo ideal en tres aspectos evidentes:

1. La onda muestreada está conformada por pulsos que tienen amplitud y duración finitas, en lugar de impulsos.
2. Los filtros prácticos de reconstrucción no son filtros ideales.
3. Los mensajes que deben muestrearse son señales *limitadas en el tiempo* cuyos espectros no están y no pueden ser estrictamente limitados en banda.

Las primeras dos diferencias pueden presentar problemas menores, mientras que la tercera conduce a un efecto más complejo conocido como **alias**.

En lo que respecta a los efectos de la forma del pulso, la discusión del cortador unipolar y los resultados del ejercicio 6.1-1 implican correctamente que casi cualquier forma de pulso $p(t)$ servirá cuando el muestreo toma la forma de una operación de *multiplicación* $x(t)s_p(t)$. Otra operación produce *muestreo de tope plano* y se describe en la próxima sección. Este tipo de muestreo podría requerir del proceso de compensación, pero ello no modifica la conclusión de que las formas del pulso son, relativamente, de poca importancia.

Para los filtros de reconstrucción prácticos, considérese la respuesta típica de un filtro superpuesta sobre el espectro de una onda muestreada, figura 6.1-7. Como se dijo, la reconstrucción se hace mediante la interpolación entre muestras. El LPF ideal ejecuta una interpolación perfecta. Con sistemas prácticos, la señal se reconstruye usando un **retenedor de orden cero (ZOH)** con

$$y(t) = \sum_k x(kT_s) \Pi\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right) \qquad [16]$$

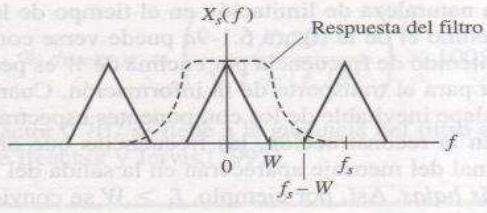


Figura 6.1-7 Filtro de reconstrucción práctico.

o un **retenedor de primer orden (FOH)** el cual realiza una interpolación lineal usando

$$y(t) = \sum_k x(kT_s)\Lambda\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right) \qquad [17]$$

El proceso de reconstrucción para cada uno de éstos se muestra en la figura 6.1-8. Tanto la función ZOH como la FOH son filtros pasabajas con magnitudes de las funciones de transferencia iguales a $|H_{ZOH}(f)| = |T_s \operatorname{sinc}(fT_s)|$ y $|H_{FOH}(f)| = |T_s\sqrt{1 + (2\pi fT_s)^2}\operatorname{sinc}^2(fT_s)|$, respectivamente. Véanse los problemas 6.1 y 6.12 para una mayor comprensión.

Si el filtro es razonablemente plano en la banda del mensaje, su salida consistirá de $x(t)$ más componentes de frecuencia espurias en $|f| > f_s - W$ fuera de la banda del mensaje. En sistemas de audio, estos componentes sonarían como zumbidos de alta frecuencia o "ruido". Sin embargo, éstos se atenúan considerablemente y su intensidad es proporcional a $x(t)$, de modo que desaparecen cuando $x(t) = 0$. Cuando $x(t) \neq 0$, el mensaje tiende a enmascarar su presencia y a hacerlas más tolerables. La combinación de un diseño adecuado del filtro y una banda de guarda adecuada creada al tomar $f_s > 2W$ convierte al filtrado práctico de reconstrucción en prácticamente una reconstrucción ideal. En el caso de reconstrucción ZOH y FOH, las formas de sus respuestas de frecuencia $\operatorname{sinc}(fT_s)$ y $\operatorname{sinc}^2(fT_s)$ distorsionarán los espectros de $x(t)$. A esto se le conoce como **error de apertura**, el cual puede minimizarse mediante un incremento de la frecuencia de muestreo o compensando con el filtro inverso apropiado.

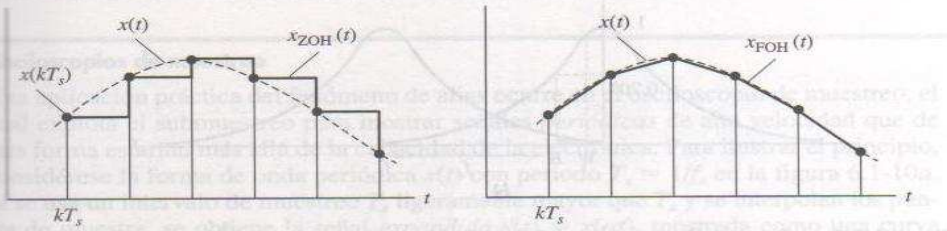


Figura 6.1-8 Reconstrucción de la señal a partir de muestras usando *a*) ZOH, *b*) FOH.

Con respecto a la naturaleza de limitación en el tiempo de las señales reales, un espectro del mensaje como el de la figura 6.1-9*a* puede verse como un espectro limitado en banda si el contenido de frecuencia por encima de W es pequeño y presumiblemente sin importancia para el transporte de la información. Cuando se muestrea este mensaje, habrá un traslape inevitable de los componentes espectrales como se muestra en la figura 6.1-9*b*. En la reconstrucción, las frecuencias que originalmente estaban fuera de la banda normal del mensaje aparecerán en la salida del filtro en la forma de frecuencias *mucho más bajas*. Así, por ejemplo, $f_1 > W$ se convierte en $f_s - f_1 < W$, como se indica en la figura.

A este fenómeno de traslación de frecuencia hacia abajo se le da el elocuente nombre de **alias**. El efecto de alias es mucho más serio que el de las frecuencias espurias que son dejadas pasar por filtros de reconstrucción no ideales, ya que estas últimas caen *fuera* de la banda del mensaje, mientras que las componentes con alias caen *dentro* de la banda del mensaje. El alias se combate filtrando el mensaje tanto como sea posible *antes* del muestreo y, si es necesario, muestreando con una frecuencia mucho mayor que la frecuencia nominal de Nyquist. Esto se hace a menudo cuando el filtro antialias no tiene una característica de corte abrupto, como es el caso de filtros RC. Considérese una señal de banda amplia cuyo contenido de mensaje tiene un ancho de banda W, pero está corrompida por otros componentes de frecuencia como el ruido. Esta señal se filtra usando un simple filtro LPF antialias RC de primer orden que tiene un ancho de banda $B = 1/2\pi RC$ con $W \ll B$ y se muestra en la figura 6.1-9*a*. Entonces es muestreada para producir los espectros mostrados en la figura 6.1-9*b*. El área sombreada representa las componentes de alias que se han pasado a la banda de paso del filtro. Observe que el área sombreada disminuye si f_s aumenta o si se emplea un LPF ideal. Asumiendo que la reconstrucción se hace con el LPF de Butterworth de primer orden, el máximo porcentaje de error de alias en la banda de paso es

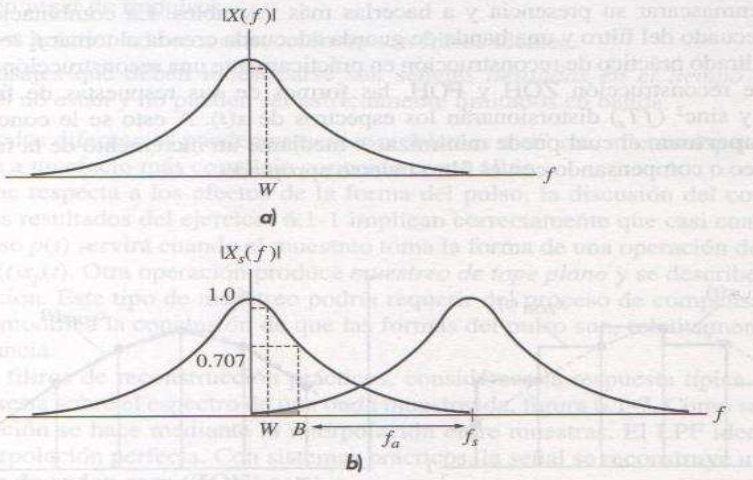


Figura 6.1-9 Espectro del mensaje. *a*) Salida del filtro *RC*; *b*) después del muestreo. El área sombreada representa la extensión en frecuencia correspondiente al alias de frecuencia dentro de la banda de paso.

$$\% \text{ de error} = \left(\frac{1/0.707}{\sqrt{1 + (f_a/B)^2}} \right) \times 100\% \qquad [18]$$

con $f_a = f_s - B$ y el factor 0.707 se debe a la ganancia del filtro en su frecuencia B de media potencia. Véase Ifeachor y Jervis (1993).

Sobremuestreo **EJEMPLO 6.1-2**

Cuando se usa tecnología VLSI para el *procesamiento digital de señales (DSP)* de señales analógicas, primero hay que tomar muestras de la señal. Como es relativamente difícil fabricar circuitos integrados con valores grandes de R y C, se usa el LPF RC LPF más viable y después se *sobremuestrea* la señal con una frecuencia muchas veces superior a la de Nyquist. Se continúa con un filtro digital para reducir las componentes de frecuencia superiores al ancho de banda W de la información. Entonces, se reduce la frecuencia de muestreo efectiva a su valor de Nyquist usando un proceso denominado *muestreo hacia abajo*. Ambos procesos, el de filtrado digital y el de muestreo hacia abajo, se hacen fácilmente con tecnología VLSI.

Supóngase que los valores máximos de R y C que se pueden colocar en un integrado son 10 kΩ y 100 pF, respectivamente, y se quiere muestrear una voz de calidad telefónica de modo que las componentes con alias estén por lo menos 30 dB por debajo de la señal deseada. Usando la ecuación (18) con

$$B = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times 100^{-12}} = 159 \text{ kHz}$$

se obtiene

$$5\% = \left(\frac{1/0.707}{\sqrt{1 + (f_a/159 \text{ kHz})^2}} \right) \times 100\%.$$

Resolviendo da $f_a = 4.49$ MHz, por tanto, la frecuencia de muestreo es $f_s = f_a + B = 4.65$ MHz. Con el LPF RC y $f_s = 4.49$ MHZ, cualquier alias en 159 kHz estará cuando menos 5 por ciento por debajo del nivel de la señal a la frecuencia de media potencia. Por supuesto, el nivel de alias será considerablemente menor que 5 por ciento a frecuencias inferiores al ancho de banda telefónico de 3.2 kHz.

Osciloscopios de muestreo **EJEMPLO 6.1-3**

Una aplicación práctica del fenómeno de alias ocurre en el osciloscopio de muestreo, el cual explota el submuestreo para mostrar señales *periódicas* de alta velocidad que de otra forma estarían más allá de la capacidad de la electrónica. Para ilustrar el principio, considérese la forma de onda periódica $x(t)$ con periodo $T_x = 1/f_x$ en la figura 6.1-10*a*. Si se usa un intervalo de muestreo T_s ligeramente mayor que T_x y se interpolan los puntos de muestra, se obtiene la señal *expandida* $y(t) = x(\alpha t)$, mostrada como una curva punteada. La frecuencia de muestreo correspondiente es

$$f_s = (1 - \alpha) f_x \qquad 0 < \alpha < 1$$

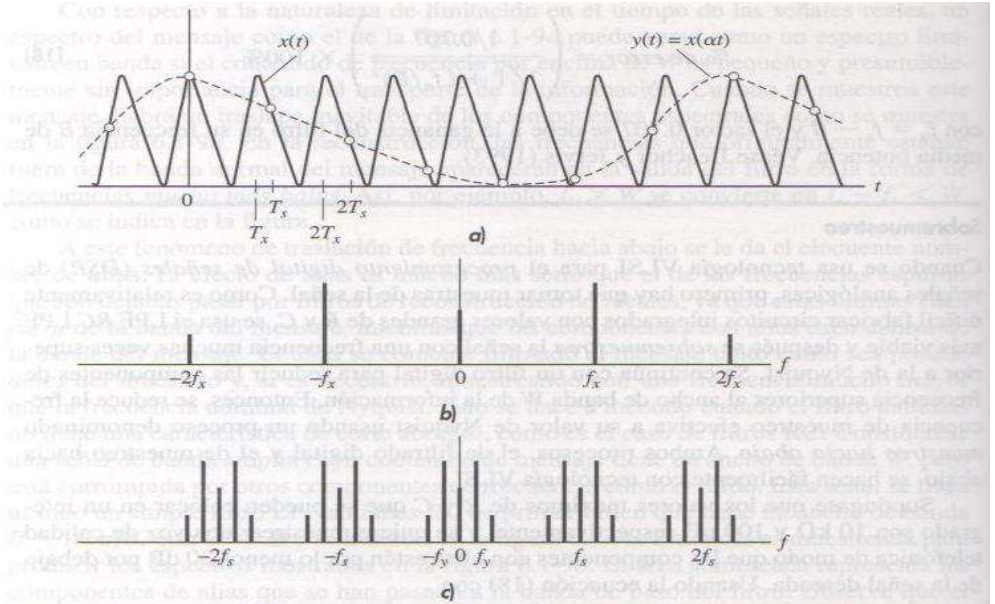


Figura 6.1-10 *a)* Señal periódica con submuestreo; *b)* espectro de $x(t)$; *c)* espectro de $y(t) = x(\alpha t)$, $\alpha < 1$.

tal que $f_s < f_x$ y aun la frecuencia fundamental de $x(t)$ será submuestreada. Se determinará ahora cómo trabaja realmente este sistema pasando al dominio de la frecuencia.

Se asume que $x(t)$ se ha prefiltrado para remover cualesquiera componentes de frecuencias mayores que la m-ésima armónica. La figura 6.1-10*b* muestra un espectro de líneas bilateral típico de $x(t)$, tomando $m = 2$ por simplicidad. Ya que el muestreo traslada todas las componentes de frecuencia hacia arriba y hacia abajo por nf_s, la fundamental aparecerá en el espectro de la función muestreada en

$$\pm f_y = \pm |f_x - f_s| = \pm \alpha f_x$$

como también en $\pm f_x$ y en $f_x \pm nf_s = (1 + n)f_x \pm nf_y$. Traslaciones semejantes aplicadas a la componente de cd y a la segunda armónica dan el espectro de la figura 6.1-10*c*, que contiene una imagen *comprimida* del espectro original centrada en cada múltiplo de f_s. En consecuencia, un filtro pasabajas con $B = f_s/2$ construirá a $y(t) = x(\alpha t)$ a partir de $x_s(t)$ siempre que

$$\alpha < \frac{1}{2m + 1}$$

lo que previene el traslape espectral.

Demuéstrese el efecto de alias haciendo un cuidadoso dibujo de cos $2\pi 10t$ y de cos $2\pi 70t$ para $0 \le t \le \frac{1}{10}$. Pónganse las dos gráficas en el mismo conjunto de ejes y determínense los valores de muestra en $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{2}{80}, \ldots, \frac{8}{80}$, los cuales corresponden a $f_s = 80$. También, verifíquese que ninguna otra forma de onda de banda limitada en $10 < W < 40$ puede interpolarse a partir de los valores de muestra de cos $2\pi 10t$.

EJERCICIO 6.1-2

6.2 MODULACIÓN DE AMPLITUD DE PULSOS

Si una señal de mensaje se describe adecuadamente mediante valores de muestra periódicos, es posible transmitir dicha señal usando modulación analógica de pulsos en la que los valores de las muestras modulan la amplitud de un tren de pulsos. Este proceso se conoce como **modulación de amplitud de pulsos (PAM)**. Un ejemplo de una señal de mensaje y la señal PAM correspondiente se muestra en la figura 6.2-1.

Como se indica en la figura 6.2-1, la amplitud del pulso varía en proporción directa con los valores de las muestras de $x(t)$. Por claridad, los pulsos se muestran como rectangulares y la duración del pulso está bastante exagerada. Las ondas moduladas reales también se retardan ligeramente en comparación con el mensaje, ya que los pulsos no pueden ser generados antes de los instantes de muestreo.

De esta señal debe ser evidente que una señal PAM tiene un contenido de cd significativo y que el ancho de banda requerido para conservar la forma del pulso excede por mucho el ancho de banda del mensaje. En consecuencia, rara vez se encuentra un sistema de comunicación de un solo canal con PAM u otros métodos de modulación de pulsos analógicos. Sin embargo, la modulación analógica de pulsos merece atención por su importancia en los sistemas de multiplexaje por división de tiempo, telemetría de datos y sistemas de instrumentación.

Muestreo de tope plano y PAM

Aunque se podría obtener una onda PAM usando un circuito cortador, un método más popular emplea la técnica de **muestreo y retención** (S/H). Esta operación produce pulsos de tope plano, como en la figura 6.2-1, en vez de los pulsos redondeados del cortador. Por tanto, aquí se da inicio con las propiedades del *muestreo de tope plano*.

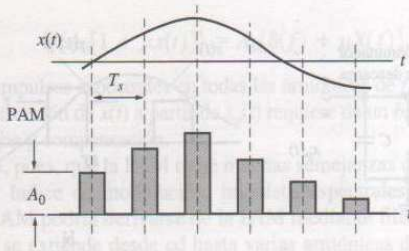


Figura 6.2-1

Un circuito S/H rudimentario está formado por dos conmutadores FET y un capacitor, conectados como se muestra en la figura 6.2-2*a*. Un pulso de compuerta en G1 cierra brevemente el conmutador de muestreo, y el capacitor mantiene el voltaje muestreado hasta que es descargado por un pulso aplicado a G2 (las unidades S/H de circuitos integrados comerciales contienen más elemento de refinamiento, incluyendo op-amps de aislamiento en la entrada y la salida). El cierre y la apertura periódicos del circuito de muestreo y retención genera la onda muestreada

$$x_p(t) = \sum_k x(kT_s)p(t - kT_s) \qquad [1]$$

ilustrada por la figura 6.2-2*b*. Observar que cada pulso de salida de duración τ representa un solo valor de la muestra instantánea.

Para analizar el muestreo de tope plano, se utilizará la relación $p(t - kT_s) = p(t) * \delta(t - kT_s)$ obteniendo

$$x_p(t) = p(t) * \left[\sum_k x(kT_s)\, \delta(t - kT_s) \right] = p(t) * x_\delta(t)$$

La transformada de Fourier de esta operación de *convolución* da

$$X_p(f) = P(f)\left[f_s \sum_n X(f - nf_s) \right] = P(f)X_\delta(f) \qquad [2]$$

La figura 6.2-3 proporciona una interpretación gráfica de la ecuación (2), tomando $X(f) = \Pi(f/2W)$. Se observa que el muestreo de tope plano es equivalente a pasar una onda muestreada ideal a través de una red con una función de transferencia $P(f) = \mathcal{F}[p(t)]$.

La característica con atenuación progresiva de alta frecuencia de un $P(f)$ típico actúa como un filtro *pasabajas* y atenúa la porción superior del espectro del mensaje. Esta pérdida en el contenido de alta frecuencia se denomina **efecto de apertura**. Cuanto más dure el pulso o la apertura τ, mayor será el efecto. El efecto de apertura se corrige en la reconstrucción incluyendo un *compensador* (*equalizer*) con

$$H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega t_d}/P(f) \qquad [3]$$

Sin embargo, se necesita muy poca o ninguna compensación cuando $\tau/T_s \ll 1$.

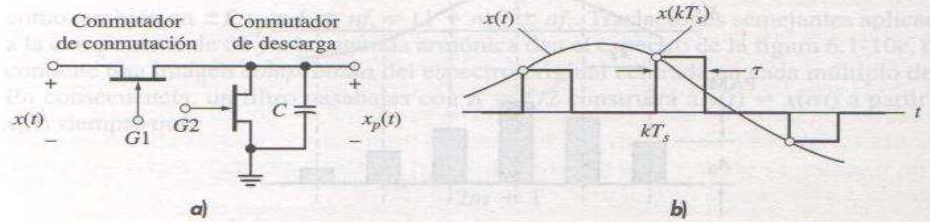


Figura 6.2-2 Muestreo de tope plano. *a*) circuito de muestreo y retención; *b*) formas de ondas.

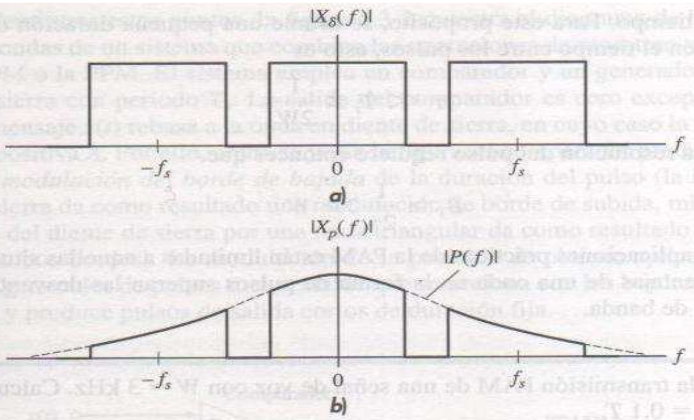


Figura 6.2-3 a) Espectro para muestreo ideal cuando $X(f) = \Pi(f/2W)$; b) efecto de apertura en el muestreo de tope plano.

Considérese ahora una señal PAM de tope plano unipolar definida por

$$x_p(t) = \sum_k A_0[1 + \mu x(kT_s)]p(t - kT_s) \quad [4]$$

La constante A_0 es igual a la amplitud del pulso no modulado, y el *índice de modulación* μ controla la cantidad de variación en la amplitud. La condición

$$1 + \mu x(t) > 0 \quad [5]$$

asegura una señal unipolar (una sola polaridad) sin pulsos faltantes. La frecuencia de los pulsos f_s resultante es particularmente importante para la sincronización en el multiplexaje por división de tiempo.

Al comparar las ecuaciones (1) y (4) se aprecia que una señal PAM se obtiene a partir de un circuito de muestreo y retención con entrada $A_0[1 + \mu x(t)]$. En correspondencia con esto, el espectro PAM se parecerá al de la figura 6.2-3*b* en el que $X(f)$ se reemplaza por

$$\mathcal{F}\{A_0[1 + \mu x(t)]\} = A_0[\delta(f) + \mu X(f)],$$

lo que resulta en impulsos espectrales en todas las armónicas de f_s y en $f = 0$. En consecuencia, la reconstrucción de $x(t)$ a partir de $x_p(t)$ requiere de un *bloqueo de cd* y también de filtrado pasabajas y compensación.

Resulta claro, pues, que la PAM tiene muchas semejanzas con la modulación AM de OC, es decir, índice de modulación, impulsos espectrales y bloqueo de cd (de hecho, una onda AM podría derivarse de la PAM mediante filtrado pasabanda). Pero el espectro PAM se extiende desde cd hasta varias armónicas de f_s, y el estimado del ancho de banda B_T de transmisión requerido debe basarse en consideraciones en el

dominio del tiempo. Para este propósito, se asume una pequeña duración del pulso τ comparada con el tiempo entre los pulsos, esto es

$$\tau \ll T_s \leq \frac{1}{2W}$$

Una adecuada resolución del pulso requiere entonces que

$$B_T \geq \frac{1}{2\tau} \gg W \quad [6]$$

En suma, las aplicaciones prácticas de la PAM están limitadas a aquellas situaciones en las que las ventajas de una onda en la forma de pulsos superan las desventajas de un mayor ancho de banda.

Considérese la transmisión PAM de una señal de voz con $W \approx 3$ kHz. Calcular B_T si $f_s = 8$ kHz y $\tau = 0.1\ T_s$.

6.3 MODULACIÓN DEL TIEMPO DE LOS PULSOS

Los valores de las muestras de un mensaje también pueden modular los parámetros de tiempo de un tren de pulsos, a saber, el ancho del pulso o su posición. Los procesos correspondientes se designan como **modulación de la duración de los pulsos (PDM)** y **modulación de la posición de los pulsos (PPM)**, y se ilustran en la figura 6.3-1. La PDM se denomina también **modulación por ancho del pulso (PWM)**. Obsérvese que el ancho del pulso o su posición varían en proporción directa con los valores de las muestras de $x(t)$.

Modulación de la duración y de la posición de los pulsos

La PDM y la PPM se colocan bajo un solo encabezado por dos razones. Primera, en ambos casos se modula un parámetro de *tiempo* de los pulsos, y los pulsos tienen *amplitud constante*. Segunda, existe una relación muy cercana entre los métodos de modulación para la PDM y la PPM.

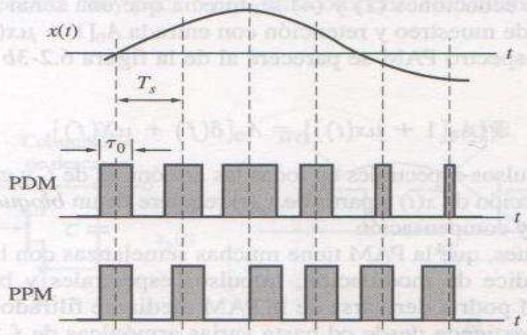


Figura 6.3-1 Tipos de modulación del tiempo del pulso.

Para demostrar estos puntos, la figura 6.3-2 muestra el diagrama de bloques y las formas de ondas de un sistema que combina las operaciones de muestreo y modulación para la PDM o la PPM. El sistema emplea un comparador y un generador de onda de diente de sierra con periodo T_s. La salida del comparador es cero excepto cuando la señal del mensaje $x(t)$ rebasa a la onda en diente de sierra, en cuyo caso la salida es una constante positiva A. Por ello, como se ve en la figura, el comparador produce una señal PDM con *modulación del borde de bajada* de la duración del pulso (la inversión del diente de sierra da como resultado una modulación de borde de subida, mientras que el reemplazo del diente de sierra por una onda triangular da como resultado una modulación por ambos bordes). La modulación de la posición se obtiene aplicando la señal PDM a un generador de pulsos monoestable que se acciona con los bordes de bajada en su entrada y produce pulsos de salida cortos de duración fija.

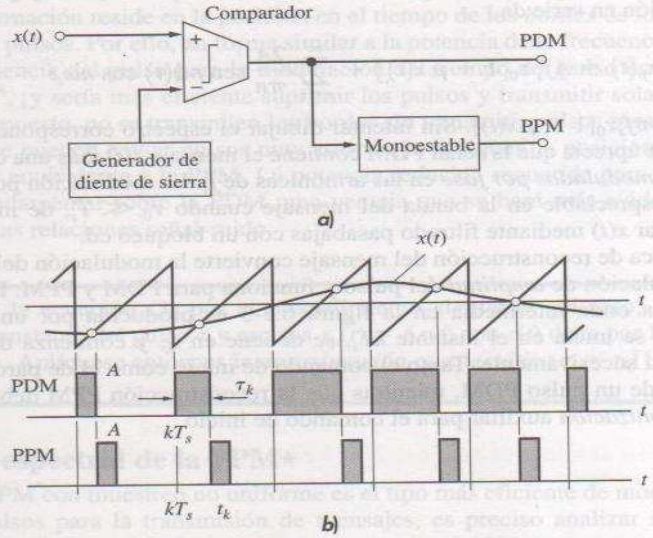


Figure 6.3–2 Generación de PDM o PPM. *a*) Diagrama de bloques; *b*) formas de ondas.

Un examen cuidadoso de figura 6.3-2*b* indica que la duración o la posición modu-ladas dependen del valor del mensaje en la posición del tiempo t_k del borde del pulso y no del tiempo de muestra aparente kT_s. Así que los valores de las muestras están espaciados *de manera no uniforme*. Insertando un circuito de muestreo y retención en la entrada del sistema se tiene un muestreo uniforme si se desea, pero hay poca diferencia entre el muestreo uniforme y el no uniforme en el caso práctico de pequeñas cantidades de modulación en el tiempo tal que $t_k - kT_s \ll T_s$.

Si se asume un muestreo casi uniforme, la duración del k-ésimo pulso en la señal PDM es

$$\tau_k = \tau_0[1 + \mu x(kT_s)] \qquad [1]$$

en donde la duración no modulada τ_0 representa a $x(kT_s) = 0$ y el índice de modulación μ controla la cantidad de modulación de la duración. La condición anterior sobre μ en la ecuación (5), sección 6.2, se aplica aquí para evitar que falten pulsos y que haya duraciones "negativas" cuando $x(kT_s) \leq 0$. Los pulsos por PPM tienen duración y amplitud fijas de modo que, a diferencia de la PAM y la PDM, no existe el problema potencial de pulsos perdidos. El k-ésimo pulso en una señal PPM comienza en el instante

$$t_k = kT_s + t_d + t_0\, x(kT_s) \qquad [2]$$

en la cual la posición no modulada $kT_s + t_d$ representa a $x(kT_s) = 0$ y la constante t_0 controla el desplazamiento del pulso modulado.

Los parámetros variables en el tiempo en las ecuaciones (1) y (2) hacen que la expresión para $x_p(t)$ sea un poco complicada. No obstante, se puede deducir una aproximación informativa para la señal PDM tomando pulsos rectangulares con amplitud A centrados en $t = kT_s$ y asumiendo que τ_k varía lentamente entre pulso y pulso. Entonces, la expansión en serie da

$$x_p(t) \approx Af_s\tau_0[1 + \mu x(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi n} \operatorname{sen} n\phi(t) \cos n\omega_s t \qquad [3]$$

donde $\phi(t) = \pi f_s \tau_0[1 + \mu x(t)]$. Sin intentar dibujar el espectro correspondiente, de la ecuación (3) se aprecia que la señal PDM contiene el mensaje $x(t)$ más una componente de cd y ondas *moduladas por fase* en las armónicas de f_s. La modulación por fase tiene un traslape despreciable en la banda del mensaje cuando $\tau_0 \ll T_s$, de modo que se puede recuperar $x(t)$ mediante filtrado pasabajas con un bloqueo cd.

Otra técnica de reconstrucción del mensaje convierte la modulación del *tiempo* del pulso en modulación de *amplitud* del pulso y funciona para PDM y PPM. Para ilustrar esta técnica, la onda intermedia en la figura 6.3-3 es producida por un *generador de rampa* que se inicia en el instante kT_s, se detiene en t_k, y comienza de nuevo en $(k + 1)T_s$, y así sucesivamente. Tanto el comando de inicio como el de paro se extraen de los bordes de un pulso PDM, mientras que la reconstrucción PPM debe tener una señal de *sincronización* auxiliar para el comando de inicio.

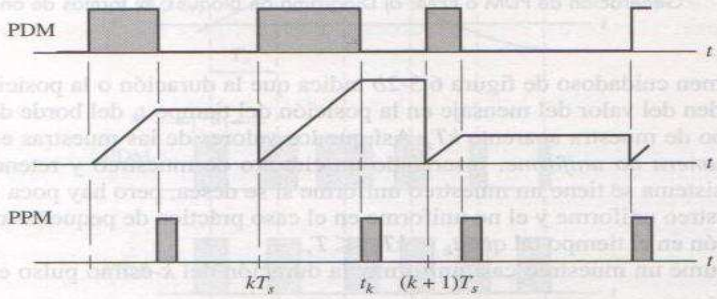


Figura 6.3-3 Conversión de PDM o PPM en PAM.

Independientemente de los detalles específicos, la demodulación de la PDM o PPM requiere pulsos recibidos con *tiempo de subida* corto para preservar exacta la información del mensaje. Para un tiempo de subida especificado $t_r \ll T_s$, el ancho de banda de transmisión debe satisfacer la condición

$$B_T \geq \frac{1}{2t_r} \qquad [4]$$

que será sustancialmente mayor que el ancho de banda de transmisión PAM. A cambio del ancho de banda adicional, se obtiene el beneficio de pulsos de amplitud constante que no sufren efectos de degradación a partir de la *distorsión no lineal* en la transmisión ya que ésta no altera ni la duración del pulso ni su posición.

Además, como en la modulación FM y PM de onda continua, la PDM y la PPM tienen el potencial de *reducción de ruido de banda ancha*, un potencial que se alcanza mucho mejor con la PPM que con la PDM. Para apreciar por qué esto es así, recuerde que la información reside en la posición en el tiempo de los *bordes* de los pulsos, no en los propios pulsos. Por ello, en forma similar a la potencia de la frecuencia portadora en AM, la potencia del pulso para la modulación del tiempo del pulso es potencia "desperdiciada", ¡y sería más eficiente suprimir los pulsos y transmitir solamente los bordes! Por supuesto, no se transmiten los bordes sin transmitir pulsos para definirlos. Sin embargo, se pueden enviar pulsos muy cortos que indiquen la posición de los bordes, un proceso equivalente a la PPM. La potencia reducida requerida para la PPM es una ventaja fundamental sobre la PDM, una ventaja que se hará más evidente cuando se examinen las relaciones señal-ruido.

EJERCICIO 6.3-1

Dedúzcase la ecuación (3) por el procedimiento siguiente: primero, supóngase una duración constante del pulso τ y escriba $x_p(t) = As(t)$ con $s(t)$ dada por la ecuación (2), sección 6.1. Aplíquese entonces la *aproximación cuasiestática* $\tau \approx \tau_0[1 + \mu x(t)]$.

Análisis espectral de la PPM★

Como la PPM con muestreo no uniforme es el tipo más eficiente de modulación analógica de pulsos para la transmisión de mensajes, es preciso analizar su espectro. El método de análisis por sí mismo merece un examen cuidadoso.

Supóngase que el k-ésimo pulso está centrado en el tiempo t_k. Si se ignora el retardo constante t_d en la ecuación (2), el muestreo no uniforme extrae el valor de la muestra en t_k, en vez de kT_s, de modo que

$$t_k = kT_s + t_0\, x(t_k) \qquad [5]$$

Por definición, la onda PPM es una suma de pulsos de amplitud constante modulados por posición, y se escribe como

$$x_p(t) = \sum_k Ap(t - t_k) = Ap(t) * \left[\sum_k \delta(t - t_k) \right]$$

donde A es la amplitud del pulso y $p(t)$ la forma del pulso. En este punto es posible una simplificación observando que $p(t)$ tendrá una duración muy corta en comparación con

T_s. Por ello, para nuestros propósitos, se puede tomar la forma del pulso como impulsiva y

$$x_p(t) \approx A \sum_k \delta(t - t_k) \qquad [6]$$

Si se desea, posteriormente se puede tomar la convolución de la ecuación (6) con $p(t)$ para tomar en cuenta la forma no impulsiva.

En las formas presentes, las ecuaciones (5) y (6) no son adecuadas para una manipulación adicional; el meollo está en el término de la posición t_k, que no se obtiene explícitamente. Afortunadamente, se diseñó una técnica con la cual se puede eliminar t_k completamente. Considérese cualquier función $g(t)$ que tenga un solo cero de primer orden en $t = \lambda$, tal que $g(\lambda) = 0$, $g(t) \neq 0$ para $t \neq \lambda$ y $\dot{g}(t) \neq 0$ en $t = \lambda$. La teoría de distribución de impulsos muestra entonces que

$$\delta(t - \lambda) = |\dot{g}(t)|\, \delta[g(t)] \qquad [7]$$

cuyo lado derecho es independiente de λ. Por tanto, la ecuación (7) puede usarse para remover a t_k de $\delta(t - t_k)$ si se puede hallar una función $g(t)$ que satisfaga la condición $g(t_k) = 0$ y las otras condiciones, pero que no contenga a t_k.

Supóngase que se toma $g(t) = t - kT_s - t_0x(t)$, que es cero en $t = kT_s + t_0x(t)$. Ahora, para un valor dado de k, hay sólo un pulso PPM y éste sucede en $t_k = kT_s + t_0x(t_k)$. Así que $g(t_k) = t_k - kT_s - t_0x(t_k) = 0$, como se desea. Insertando $\lambda = t_k$, $\dot{g}(t) = 1 - t_0\,\dot{x}(t)$, etc., en la ecuación (7) da

$$\delta(t - t_k) = |1 - t_0\,\dot{x}(t)|\, \delta[t - kT_s - t_0\,x(t)]$$

y la onda PPM de la ecuación (6) se convierte en

$$x_p(t) = A[1 - t_0\,\dot{x}(t)] \sum_k \delta[t - t_0\,x(t) - kT_s]$$

No se usa el valor absoluto ya que $|t_0\dot{x}(t)| < 1$ para la mayoría de las señales de interés si $t_0 \ll T_s$. Se convierte entonces la suma de impulsos en la suma de exponenciales

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \qquad [8]$$

que es la **fórmula de la suma de Poisson**. Finalmente se obtiene

$$x_p(t) = Af_s[1 - t_0\,\dot{x}(t)] \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s[t - t_0\,x(t)]}$$

$$= Af_s[1 - t_0\,\dot{x}(t)] \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cos[n\omega_s t - n\omega_s t_0\,x(t)] \right\} \qquad [9]$$

La deducción de la ecuación (8) se considera en el problema 6.3-6.

La interpretación de la ecuación (9) muestra que la PPM con muestreo no uniforme es una combinación de la modulación lineal y exponencial de la portadora, ya que cada armónica de f_s es modulada por fase por el mensaje $x(t)$ y modulada en ampli-

tud por la derivada $\dot{x}(t)$. Así que el espectro consta de bandas laterales AM y PM centradas en todos los múltiplos de f_s, más un impulso de cd y el espectro de $\dot{x}(t)$. Sobra decir que dibujar este tipo de espectro es un ejercicio laborioso hasta para la modulación de un solo tono. El término principal de la ecuación (9) sugiere que el mensaje puede recuperarse mediante filtrado pasabajas e *integración*. Sin embargo, el método de integración no aprovecha completamente las propiedades de reducción de ruido de la PPM, de modo que el procedimiento usual es la conversión en AM o PDM seguida por filtrado pasabajas.

6.4 PROBLEMAS

6.1-1 Considerar la señal muestreada con un cortador en la ecuación (3) con $\tau = T_s/2$, $f_s = 100$ Hz y $x(t) = 2 + 2\cos 2\pi 30t + \cos 2\pi 80t$. Dibujar e identificar el espectro de líneas unilateral de $x_s(t)$ para $0 \le f \le 300$ Hz. Determínese entonces la señal de salida cuando se aplica $x_s(t)$ a un LPF ideal con $B = 75$ Hz.

6.1-2 Resuélvase el problema 6.1-1 con $x(t) = 2 + 2\cos 2\pi 30t + \cos 2\pi 140t$.

6.1-3 El intervalo útil de frecuencias de cierto amplificador es de f_ℓ a $f_\ell + B$, con $B \gg f_\ell$. Diseñar un sistema que emplee cortadores bipolares y permita que el amplificador maneje señales con un contenido de cd significativo y ancho de banda $W \ll B$.

6.1-4* La señal de banda base para FM estéreo es

$$x_b(t) = [x_L(t) + x_R(t)] + [x_L(t) - x_R(t)]\cos \omega_s t + A\cos \omega_s t/2$$

con $f_s = 38$ kHz. El sistema cortador en la figura P6.1-4 está diseñado para generar esta señal. El LPF tiene ganancia K_1 para $|f| \le 15$ kHZ, ganancia K_2 para $23 \le |f| \le 53$ kHz, y rechaza $|f| \ge 99$ kHz. Úsese un dibujo para demostrar que $x_s(t) = x_L(t)s(t) + x_R(t)[1 - s(t)]$, donde $s(t)$ es una función de conmutación unipolar con $\tau = T_s/2$. Luego determínense los valores necesarios de K_1 y K_2.

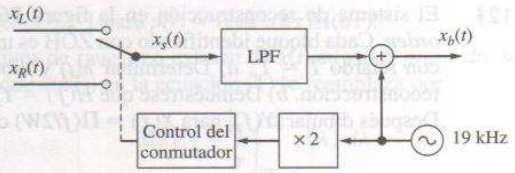


Figura P6.1-4

6.1-5 Un popular circuito *decodificador de estéreo* emplea conmutadores de transistores para generar $v_L(t) = x_1(t) - Kx_2(t)$ y $v_R(t) = x_2(t) - Kx_1(t)$ donde K es una constante, $x_1(t) = x_b(t)s(t)$, $x_2(t) = x_b(t)[1 - s(t)]$, $x_b(t)$ es la señal FM de banda base estéreo en el problema 6.1-4 y $s(t)$ es una función de conmutación unipolar con $\tau = T_s/2$. *a*) Determinar K de manera que un filtrado pasabajas de $v_L(t)$ y $v_R(t)$ produzca las señales deseadas de los canales izquierdo y derecho. *b*) ¿Cuál es la desventaja de un circuito conmutador más sencillo que tenga $K = 0$?

6.1-6 Dedúzcase la ecuación (11) usando la ecuación (14), sección 2.5.

6.1-7 Supóngase que $x(t)$ tiene el espectro en la figura P6.1-7 con $f_u = 25$ kHz y $W = 10$ kHz. Dibujar $x_\delta(f)$ para $f_s = 60$, 45 y 25 kHz. Coméntese, en cada caso, la posible reconstrucción de $x(t)$ a partir de $x_\delta(t)$.

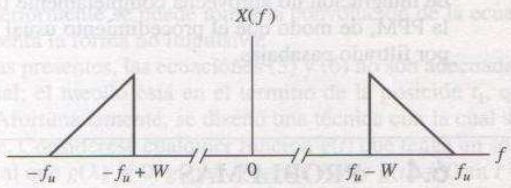


Figura P6.1-7

6.1-8 Considerar el espectro de la señal pasabanda en la figura P6.1-7 cuya frecuencia de Nyquist es $f_s = 2f_u$. Sin embargo, el *teorema de muestreo pasabanda* establece que $x(t)$ puede reconstruirse a partir de $x_\delta(t)$ mediante el filtrado *pasabanda* si $f_s = 2f_u/m$ y el entero m satisface $(f_u/W) - 1 < m \le f_u/W$. *a*) Determinar m y grafique f_s/W *versus* f_u/W para $0 < f_u/W \le 5$. *b*) Verifíquese el teorema graficando $X_\delta(f)$ cuando $f_u = 2.5W$ y $f_s = 2.5W$. Demuéstrese también que la mayor tasa $f_s = 4W$ no sería aceptable.

6.1-9 La señal $x(t) = \text{sinc}^2 5t$ es muestreada idealmente en $t = 0, \pm 0.1, \pm 0.2, \ldots$, y reconstruida por un LPF ideal con $B = 5$, ganancia unitaria y cero retardo. Elaborar el proceso de reconstrucción gráficamente, como en la figura 6.1-6 para $|t| \le 0.2$.

6.1-10 Un pulso rectangular con $\tau = 2$ es muestreado idealmente y reconstruido usando un LPF ideal con $B = f_s/2$. Dibujar las ondas de salida resultantes cuando $T_s = 0.8$ y 0.4, asumiendo que un tiempo de muestreo está en el centro del pulso.

6.1-11 Supóngase que una onda muestreada idealmente se reconstruye usando un *retenedor de orden cero* con retardo $T = T_s$. *a*) Determinar y dibujar $y(t)$ para mostrar que la onda reconstruida es una aproximación en escalera de $x(t)$. *b*) Dibújese $|Y(f)|$ para $X(f) = \Pi(f/2W)$ con $W \ll f_s$. Coméntese el significado del resultado.

6.1-12‡ El sistema de reconstrucción en la figura P6.1-12 se denomina *retenedor de primer orden*. Cada bloque identificado con ZOH es un retenedor de orden cero (ejemplo 3.1-3) con retardo $T = T_s$. *a*) Determinar $h(t)$ y dibujar $y(t)$ para interpretar la operación de reconstrucción. *b*) Demuéstrese que $H(f) = T_s(1 + j2\pi fT_s)(\text{sinc}^2 fT_s)\exp(-j2\pi fT_s)$. Después dibujar $|Y(f)|$ para $X(f) = \Pi(f/2W)$ con $W < f_s/2$.

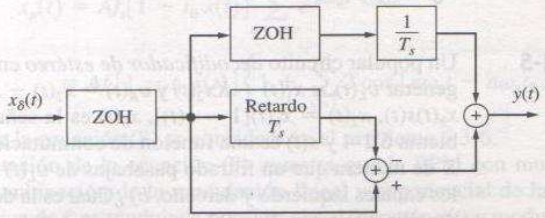


Figura P6.1-12

6.1-13‡ Úsese el teorema de Parseval y la ecuación (14) con $T_s = 1/2W$ y $B = W$ para mostrar que la energía de una señal limitada en banda está relacionada con sus valores de muestra por

$$E = (1/2W) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k/2W)|^2$$

6.1-14 El **teorema de muestreo en el dominio de la frecuencia** señala que si $x(t)$ es una señal *limitada en tiempo* tal como $x(t) = 0$ para $|t| \geq T$, entonces $X(f)$ está completamente determinada por sus valores de muestra $X(nf_0)$ con $f_0 \leq 1/2T$. Demuéstrese este teorema escribiendo la serie de Fourier para la señal periódica $v(t) = x(t) * [\Sigma_k \, \delta(t - kT_0)]$, donde $T_0 \geq 2T$ y usando la relación $x(t) = v(t)\Pi(t/2T)$.

6.1-15* Se va a mostrar una señal con periodo $T_x = 0.08$ μs usando un osciloscopio de muestreo cuya respuesta interna de alta frecuencia tiene una frecuencia de corte en $B = 6$ MHz. Determinar los valores máximos para la frecuencia de muestreo y el ancho de banda del LPF de premuestreo.

6.1-16 Explicar por qué el osciloscopio de muestreo en el problema, 6.1-15 no proporcionará una imagen útil cuando $T_x < 1/3B$.

6.1-17* Una señal con $W = 15$ kHz se ha muestreado a 150 kHz. ¿Cuál será el máximo porcentaje del error de apertura si la señal se reconstruye usando un *a*) ZOH, *b*) un FOH?

6.1–18 Una señal con $W = 15$ kHz se ha muestreado a 150 kHz con un filtro Butterworth antialias de primer orden. ¿Cuál será el máximo porcentaje del error de alias en la banda de paso?

6.1-19 Demuéstrese que la igualdad en la ecuación (5) de la sección 6.1 no se cumple para una señal senoidal.

6.1-20* ¿Cuál es la frecuencia de Nyquist para muestrear adecuadamente las señales siguientes: *a*) sinc $(100t)$, *b*) sinc^2 $(100t)$, *c*) 10 $\cos^3(2\pi 10^5 t)$?

6.1-21 Resuélvase de nuevo el ejemplo 6.1-2, de manera que las componentes con alias estén por lo menos 40 dB por debajo del nivel de la señal con una frecuencia de 159 kHz a media potencia.

6.2-1 Dibujar $|X_p(f)|$ y determine $H_{eq}(f)$ para muestreo de tope plano con $\tau = T_s/2, f_s = 2.5W$ y $p(t) = \Pi(t/\tau)$. ¿Es esencial el proceso de compensación en este caso?

6.2-2 Repítase el problema 6.2-1 para $p(t) = (\cos \pi t/\tau)\Pi(t/\tau)$.

6.2-3‡* Algunos dispositivos de muestreo extraen de $x(t)$ su *valor promedio* sobre el intervalo de muestreo, así que $x(kT_s)$ en la ecuación (1) se reemplaza por

$$\bar{x}(kT_s) \triangleq \frac{1}{\tau} \int_{kT_s - \tau}^{kT_s} x(\lambda) \, d\lambda$$

a) Diséñese un modelo en el dominio de la frecuencia de este proceso usando un filtro promediador con entrada $x(t)$ y salida $\bar{x}(t)$, seguido por muestreo instantáneo de tope plano. Obténgase entonces la respuesta al impulso del filtro promediador y escríbase la expresión resultante para $X_p(f)$. *b*) Determinar el compensador necesario cuando $p(t)$ es un pulso rectangular.

6.2-4 Considerar la señal PAM en la ecuación (4). *a*) Demuéstrese que su espectro es

$$X_p(f) = A_0 f_s P(f) \left\{ \sum_n [\delta(f - nf_s) + \mu X(f - nf_s)] \right\}$$

b) Dibujar $|X_p(f)|$ cuando $p(t) = \Pi(t/\tau)$ con $\tau = T_s/2$ y $\mu x(t) = \cos 2\pi f_m/t$ con $f_m < f_s/2$.

6.2-5 Supóngase que la señal PAM en la ecuación (4) se va a transmitir por un canal con acoplamiento de transformador, de modo que la forma del pulso se toma como $p(t) = \Pi[(t - \tau/2)/\tau] - \Pi[(t + \tau/2)/\tau]$ para eliminar la componente de cd de $x_p(t)$. *a*) Úsese la expresión en el problema 6.2-4*a* para dibujar $|X_p(f)|$ cuando $\tau = T_s/4$, $X(f) = \Pi(f/2W)$ y $f_s > 2W$. *b*) Determínese un compensador adecuado, asumiendo que $x(t)$ tiene un contenido de frecuencia despreciable para $|f| < f_\ell < W$. ¿Por qué es necesaria esta consideración?

6.2-6 Muéstrese cómo una señal PAM puede demodularse usando un detector de producto. Asegurarse de describir los parámetros de frecuencia para el OL y el LPF.

6.3-1* Calcular el ancho de banda de transmisión necesario para PDM de voz con $f_s = 8$ kHz, $|\mu x(t)| \leq 0.8$ y $\tau_0 = T_s/5$ cuando se quiere $t_r \leq 0.25\tau_{mín}$.

6.3-2 Una señal PDM de voz con $f_s = 8$ kHz y $|\mu x(t)| \leq 0.8$ se va a transmitir por un canal con $B_T = 500$ kHz. Obténganse los límites para τ_0 de modo que $\tau_{máx} \leq T_s/3$ y $\tau_{mín} \geq 3t_r$.

6.3-3 Una onda de pulsos modulados es generada mediante muestreo uniforme de la señal $x(t) = \cos 2\pi t/T_m$ en $t = kT_s$, donde $T_s = T_m/3$. Dibujar e identificar $x_p(t)$ cuando la modulación es: *a*) PDM con $\mu = 0.8$, $\tau_0 = 0.4T_S$, y bordes de subida fijos en $t = kT_s$; *b*) PPM con $t_d = 0.5T_s$ y $t_0 = \tau = 0.2T_s$.

6.3-4 Repítase el problema 6.3-3 con $T_s = T_m/6$.

6.3-5 Úsese la ecuación (9) para diseñar un sistema que emplea un generador PPM y produce modulación de fase de banda angosta con $f_c = mf_s$.

6.3-6 La **fórmula de la suma de Poisson** expresa en general que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi n\lambda/L} = L \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - mL)$$

donde λ es una variable independiente y L es una constante. *a*) Dedúzcase la versión en el dominio del tiempo en la forma dada por la ecuación (8) tomando $\mathcal{F}^{-1}[S_\delta(f)]$. *b*) Dedúzcase la versión en el dominio de la frecuencia tomando $\mathcal{F}[s_\delta(t)]$.

6.3-7‡ Sea $g(t)$ cualquier función continua que aumenta o disminuye monótonamente en $a \leq t \leq b$ y cruza en cero en $t = \lambda$ en este intervalo. Justifíquese la ecuación (7) haciendo el cambio de variable $v = g(t)$ en

$$\int_a^b \delta[g(t)] \, dt$$

capítulo

7

Sistemas de comunicación analógicos

RESUMEN DEL CAPÍTULO

7.1 Receptores para modulación de OC

Receptores superheterodinos Receptores de conversión directa Receptores de propósito especial Especificaciones del receptor Analizadores de espectro de exploración★

7.2 Sistemas de multiplexaje

Multiplexaje por división de frecuencia Multiplexaje de portadora en cuadratura Multiplexaje por división de tiempo Diafonía y tiempos de guarda Comparación de la TDM y la FDM

7.3 Lazos de sincronización de fase (PLL)

Operación y enganche del PLL Detección síncrona y sintetizadores de frecuencia Modelos del PLL linealizados y detección de FM

7.4 Sistemas de televisión

Señales de video, resolución y ancho de banda Transmisores y receptores monocromáticos Televisión a color HDTV

Los sistemas de comunicación que emplean modulación lineal o exponencial de OC pueden diferir en muchos aspectos: tipo de modulación, frecuencia portadora, medio de transmisión, etc.; pero tienen en común la propiedad de que una señal pasabanda senoidal con envolvente o fase variable en el tiempo transmite la información del mensaje. En consecuencia, los dispositivos de hardware genéricos —osciladores, mezcladores o filtros pasa banda, por ejemplo— son bloques de construcción importantes para *todos* los sistemas de modulación de onda continua. Además, muchos sistemas comprenden tanto la técnica de modulación de OC lineal como la exponencial.

Este capítulo presenta, por tanto, una mirada más amplia a los sistemas y al hardware de modulación de OC, usando conceptos y resultados de los capítulos 4 a 6. Algunos temas específicos incluyen receptores de OC, multiplexaje de frecuencia y por división de tiempo, lazos de sincronización de fase y sistemas de televisión.

OBJETIVOS

Después de estudiar este capítulo y realizar los ejercicios, used será capaz de hacer lo siguiente:

1. Diseñar, en forma de diagrama de bloques, un receptor superheterodino que satisfaga las especificaciones establecidas (sección 7.1).
2. Predecir en qué frecuencias un superheterodino es susceptible de entradas espurias (sección 7.1).
3. Dibujar el diagrama de bloques de un sistema FDM o de un TDM, dadas las especificaciones, y calcular los diferentes anchos de banda (sección 7.2).
4. Identificar las estructuras del lazo de sincronización de fase utilizadas para el filtrado piloto, la síntesis de frecuencia y la detección de FM (sección 7.3).
5. Analizar un sistema de lazo de sincronización de fase sencillo y determinar la condición para la operación de enganche (sección 7.3).
6. Explicar los siguientes términos de TV: *exploración de trama, campo, cuadro, retraza, luminancia, crominancia* y *compatibilidad de color* (sección 7.4).
7. Estimar los requerimientos de ancho de banda para la transmisión de imagen cuando se dan la resolución vertical, el tiempo de línea activa y la proporción dimensional (sección 7.4).
8. Describir las diferencias significativas en el desempeño de los sistemas NTSC *versus* los sistemas HDTV (sección 7.4).

7.1 RECEPTORES PARA MODULACIÓN DE OC

Todo lo que en realidad es esencial en un receptor de OC es: un mecanismo de sintonización, demodulación y amplificación. Con una señal lo suficientemente intensa, hasta es posible captarla sin amplificación; como testigo está el conjunto histórico del radio de cristal. Sin embargo, la mayoría de los receptores operan con base en un principio más sofisticado, el **superheterodino**, que se discutirá en primer lugar. Después, se considerarán otros tipos de receptores y el analizador de espectro de exploración, emparentado con los receptores.

Receptores superheterodinos

Además de la demodulación, un radiorreceptor común debe realizar otras tres operaciones: 1) *sintonización* de la frecuencia portadora para seleccionar la señal deseada, 2) *filtrado* para separar esa señal de las otras recibidas con ella y 3) *amplificación* para compensar por pérdidas en la transmisión. Por lo menos, se debe proporcionar cierta amplificación antes de la demodulación para llevar la señal hasta un nivel adecuado en la circuitería del demodulador. Por ejemplo, si el demodulador se basa en un detector

de envolvente de diodo, la señal de entrada tiene que superar la caída del voltaje directo del diodo. En teoría, todos los requerimientos anteriores podrían cumplirse con un amplificador pasabanda sintonizable de alta ganancia. En la práctica, los problemas de una pasabanda fraccional y de estabilidad hacen que este tipo de amplificador sea costoso y difícil de construir. Armstrong diseñó el receptor superheterodino para evitar estos problemas.

El principio del superheterodino requiere de dos secciones de amplificación y filtrado antes de la demodulación, como se ilustra en la figura 7.1-1. Primero se selecciona la señal entrante $x_c(t)$ y se amplifica por medio de una sección de **radiofrecuencia (RF)** sintonizada a la frecuencia portadora deseada f_c. El amplificador tiene un ancho de banda relativamente grande B_{RF} que pasa parcialmente señales de los canales adyacentes junto con $x_c(t)$. Luego, un **convertidor de frecuencias** compuesto por un mezclador y un oscilador local (OL) traslada hacia abajo la salida de RF hasta una **frecuencia intermedia (IF)** en $f_{IF} < f_c$. La frecuencia ajustable del OL sigue la sintonización de RF de manera que

$$f_{OL} = f_c + f_{IF} \quad \text{o} \quad f_{OL} = f_c - f_{IF} \qquad [1]$$

y por tanto

$$|f_c - f_{OL}| = f_{IF} \qquad [2]$$

Una sección de IF con ancho de banda $B_{IF} \approx B_T$ suprime ahora las señales de los canales adyacentes. Esta sección es un amplificador banda de paso fija, denominada sección de IF, que proporciona la mayoría de la ganancia. Finalmente, la salida IF pasa al demodulador para la recuperación del mensaje y la amplificación de la banda base. Los parámetros para la radiodifusión comercial de receptores de AM y FM se dan en la tabla 7.1-1.

Tabla 7.1-1 Parámetros de radios y FM

	AM	FM
Frecuencia de portadora	540–1600 kHz	88.1–107.9 MHz
Separación de portadoras	10 kHz	200 kHz
Frecuencia intermedia	455 kHz	10.7 MHz
Ancho de banda de IF	6–10 kHz	200–250 kHz
Ancho de banda de audio	3–5 kHz	15 kHz

Los dibujos de los espectros de la figura 7.1-2 ayudan a aclarar la forma en que actúa un receptor superheterodino. Aquí se asume una señal modulada con bandas laterales simétricas (para distinguirla de la SSB o VSB) y se toma $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ de modo que

$$f_c = f_{OL} - f_{IF}$$

El espectro de la entrada de RF en la figura 7.1-2*a* incluye la señal deseada más señales de canales adyacentes a cada lado y otra señal en la **frecuencia imagen**

$$f_c' = f_c + 2f_{IF} = f_{OL} + f_{IF} \qquad [3]$$

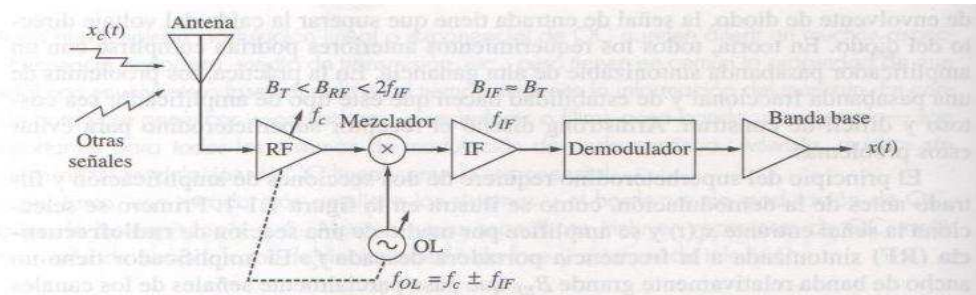


Figura 7.1-1 Receptor superheterodino.

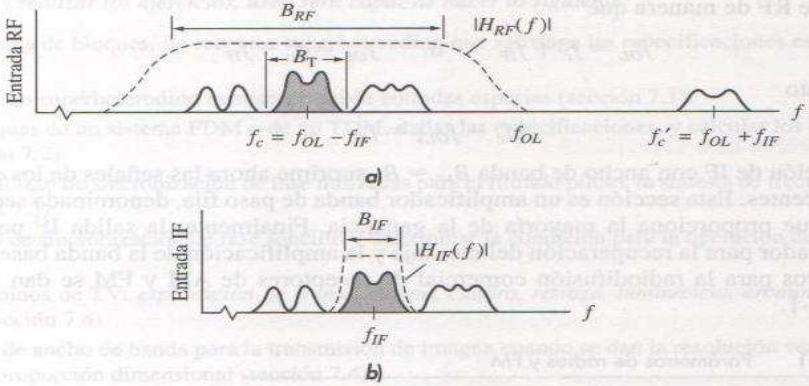


Figura 7.1-2

La tarea principal de la sección de RF es pasar $f_c \pm B_T/2$ y al mismo tiempo rechazar la señal con frecuencia imagen. Para que f_c' llegue al mezclador, tiene que convertirse hacia abajo hasta

$$f_c' - f_{OL} = (f_{OL} + f_{IF}) - f_{OL} = f_{IF}$$

y la señal de frecuencia imagen produciría un efecto semejante al de la interferencia de cocanal. Por ello, se desea una respuesta $|H_{RF}(f)|$ como la de la línea punteada, con

$$B_T < B_{RF} < 2f_{IF} \qquad [4]$$

El espectro filtrado y convertido hacia abajo en la entrada de IF se muestra en la figura 7.1–2*b*. La respuesta de IF indicada $|H_{IF}(f)|$ con $B_{IF} \approx B_T$ completa la tarea de rechazo del canal adyacente.

La estructura superheterodina ofrece varios beneficios prácticos. Primero, la sintonización ocurre completamente en el extremo "frontal", de manera que el resto de la circuitería, incluido el demodulador, no requiere de ajustes para cambiar f_c. Segundo,

la separación entre f_c y f_{IF} elimina la inestabilidad potencial debida a realimentación parásita desde la salida amplificada hasta las entradas del receptor. Tercero, la mayor parte de la ganancia y la selectividad están concentradas en la banda de IF de frecuencia fija. Como f_{IF} es un parámetro de diseño interno, se puede escoger para lograr un ancho de banda fraccionario B_{IF}/f_{IF} razonable a fin de facilitar la realización. Tomados en conjunto, estos beneficios posibilitan la construcción de superheterodinos con ganancia extremadamente alta, de 75 dB o más, sólo en la banda IF. También se emplean filtros pasabanda de Q alta mecánicos, cerámicos, de cristal y SAW, alcanzando así reducciones sustanciales en la interferencia de canales adyacentes.

Además, cuando el receptor debe cubrir un amplio intervalo de frecuencias portadoras, la selección de $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ puede dar como resultado una **razón de sintonización** del OL menor y más fácil de alcanzar. Por ejemplo, con radios AM, donde $540 < f_c < 1600$ kHz y $f_{IF} = 455$ kHz el uso de $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ da como resultado $995 < f_{OL} < 2055$ kHz y en consecuencia un intervalo de sintonización de 2:1. Por otra parte, si se elige $f_{OL} = f_c - f_{IF}$, entonces para los mismos intervalos de frecuencias de IF y de entrada, se obtiene $85 < f_{OL} < 1145$ kHz o un intervalo de sintonización de OL 13:1. Sin embargo, hay que señalar que tomando $f_{OL} > f_c$ en un receptor superheterodino de SSB produce **inversión de la banda lateral** en la señal convertida hacia abajo, de modo que la USSB en RF se convierte en LSSB en IF, y viceversa.

Una desventaja primordial de la estructura superheterodina es su potencial para respuestas espurias a frecuencias cercanas a f_c. La respuesta con frecuencia imagen es el problema más evidente. La radio de la figura 7.1-1 emplea un BPF sintonizable para el rechazo de imagen. Con la tecnología actual de circuitos integrados, quizá no sea económico el uso de BPF sintonizables de alta Q y por ello se deben emplear otros medios de rechazo de imagen. El incremento de f_{IF} aumentará la separación entre f_c y f'_c y, por tanto, se reducirán los requerimientos para el BPF del amplificador de RF. De hecho, si se hace f_{IF} lo suficientemente alta, podría usarse un LPF más económico para el rechazo de imagen.

Empero, las imágenes no son el único problema que enfrentan los superheterodinos con respecto a respuestas espurias. Cualquier distorsión en la señal del OL generará armónicas que se mezclan con una entrada espuria y pasan a la sección de IF. Ésta es la razón por la cual el OL debe producir una onda seno "limpia". La forma no senoidal de señales digitales está cargada con armónicas y, por ende, si un receptor contiene circuitería digital, se deben tomar precauciones para evitar que estas señales se "fuguen" hacia la etapa mezcladora. Algunos problemas adicionales proceden de la alimentación de señales a través de no linealidades. Por ejemplo, cuando una señal intensa de frecuencia cercana a $\frac{1}{2}f_{IF}$ llega a la entrada IF, se puede producir su segunda armónica si la primera etapa del amplificador IF es no lineal. Esta segunda armónica, aproximadamente igual a f_{IF}, será amplificada entonces por etapas posteriores y aparecerá en la entrada del detector como interferencia.

Los receptores superheterodinos a menudo contienen un **control automático de ganancia** (**AGC**, *automatic gain control* en inglés), lo que permite que la ganancia del receptor se ajuste automáticamente de acuerdo con el nivel de la señal de entrada. El AGC se logra al rectificar la señal de audio del receptor, determinando de esta manera su valor promedio. Este valor de cd es entonces realimentado a la etapa de IF o RF para aumentar o disminuir la ganancia de la etapa. Un radio de AM incluye usualmente una señal de **control automático de volumen** (**AVC**, por sus iniciales en inglés) desde el demodulador hasta la etapa IF, mientras que un receptor de FM tiene un **control automático de frecuencia** (**AFC**, por sus iniciales en inglés) realimentado hasta el OL para corregir pequeñas desviaciones de frecuencia.

EJEMPLO 7.1-1 **Superheterodinos y respuesta a señales espurias**

Un receptor superheterodino con $f_{IF} = 500$ kHz y $3.5 < f_{OL} < 4.0$ MHz tiene un dial de sintonización calibrado para recibir señales desde 3 hasta 3.5 MHz. Está sintonizado para recibir una señal de 3.0 MHz. El receptor tiene un amplificador de RF de banda ancha y se ha determinado que el OL tiene una salida significativa de la tercera armónica. Si se oye una señal, ¿cuáles son sus posibles frecuencias de portadora? Con $f_{OL} = 3.5$ MHz, $f_c = f_{OL} - f_{IF} = 3.5 - 0.5 = 3.0$ MHz y la frecuencia imagen es $f'_c = f_c + 2f_{IF} = 4.0$ MHz. Pero la tercera armónica del oscilador es 10.5 MHz y por ello $f''_c = 3f_{OL} - f_{IF} = 10.5 - 0.5 = 10.0$ MHz. La frecuencia imagen correspondiente es entonces $f'''_c = f''_c + 2f_{IF} = 10 + 1 = 11$ MHz. En consecuencia, con este receptor, aunque el dial indique que la estación está transmitiendo a 3.0 MHz, en realidad también lo puede estar haciendo a 4, 10 u 11 MHz.

EJERCICIO 7.1-1 Determinar las frecuencias espurias para el receptor del ejemplo 7.1-1 si $f_{IF} = 7.0$ MHz con $10 \leq f_{OL} \leq 10.5$ MHz y la salida del oscilador local produce una tercera armónica. ¿Cuál sería el mínimo rechazo de entrada espuria en dB, si la entrada del receptor estuviese precedida por un LPF Butterworth de primer orden con $B = 4$ MHz.

Receptores de conversión directa

Los **receptores de conversión directa (DC)**[1] pertenecen al tipo de receptores **RF sintonizados** (**TRF** por *tuned-RF* en inglés) que consisten de un amplificador RF seguido por un detector de producto y una amplificación adecuada del mensaje. Éstos se conocen como receptores **homodinos**. En la figura 7.1-3 se muestra un diagrama de un receptor de DC. El rechazo de la interferencia de canales adyacentes se lleva a cabo mediante el LPF después del mezclador. El receptor de DC no sufre el *mismo* problema de la imagen que afecta al superheterodino y debido a la tecnología mejorada de sus circuitos, con mayor ganancia y amplificadores RF más estables, es capaz de tener un buen rendimiento. La simplicidad del DC se presta a aplicaciones de sensores inalámbricos extremadamente diminutos.

La mayor desventaja del DC es que no rechaza la señal de imagen que está presente en la banda lateral opuesta y, por ello, es más susceptible al ruido y la interferencia. La figura 7.1-4 ilustra la salida de dos señales SSB de un solo tono, una transmitida en la banda lateral superior, o $f_c + f_1$, y una señal interferente en la banda lateral inferior, o $f_c - f_2$. Tanto f_1 como f_2 aparecerán en la salida del receptor. No obstante, el sistema mostrado en la figura 7.1-4, desarrollado originalmente por Campbell (1993), elimina la otra banda lateral. Si se estudian los nodos en la figura 7.1-4, la salida del receptor contiene solamente la señal de la banda lateral superior $f_c + f_1$.

Receptores de propósito especial

Otros tipos de receptores usados para propósitos especiales incluyen el heterodino, el TRF y la estructura de doble conversión. Un **receptor heterodino** es un superheterodino sin la sección de RF, lo cual eleva los problemas potenciales de la frecuencia imagen. Estos receptores se construyen para frecuencias de microondas con un mezclador

[1] N. del E.: En este caso se prefiere usar las siglas en inglés para que no se preste a confusión con las siglas CD, que se asocian con corriente directa.

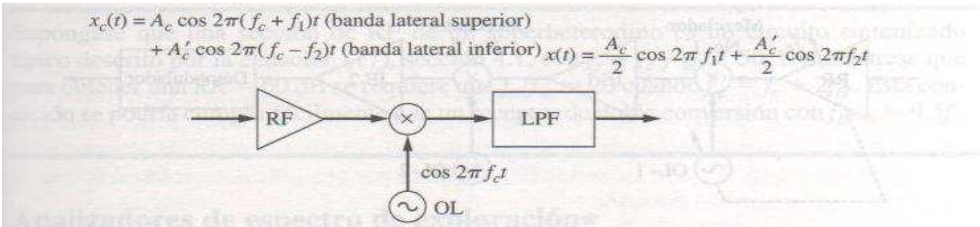

$x_c(t) = A_c \cos 2\pi(f_c + f_1)t$ (banda lateral superior)
$+ A_c' \cos 2\pi(f_c - f_2)t$ (banda lateral inferior)
$x(t) = \frac{A_c}{2} \cos 2\pi f_1 t + \frac{A_c'}{2} \cos 2\pi f_2 t$
RF
LPF
$\cos 2\pi f_c t$
OL

Figura 7.1-3 Receptor de conversión directa.

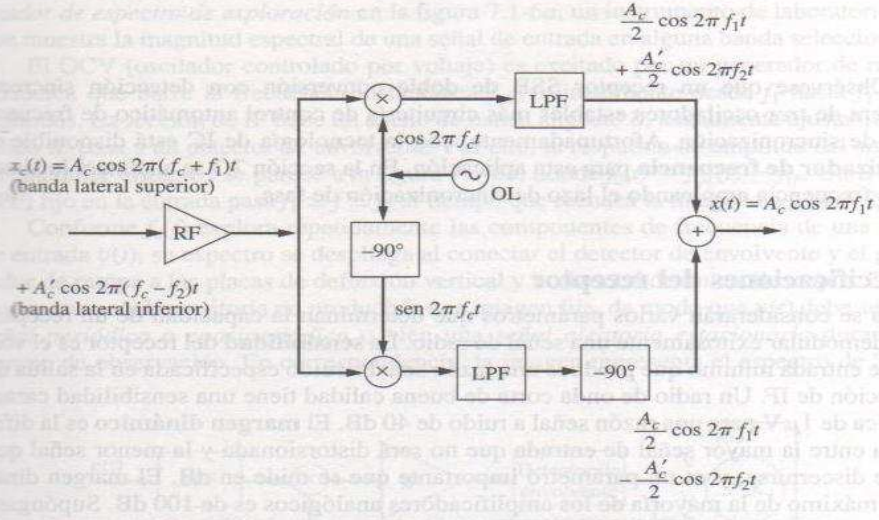


Figura 7.1-4 Receptor de conversión directa con rechazo de banda lateral opuesta.

de diodo precedido por un filtro fijo de microondas que rechazará las imágenes. Además del receptor TRF de DC, también puede tenerse un amplificador RF sintonizable y un detector de envolvente. El radio de cristal clásico es el TRF más sencillo.

En la figura 7.1-5, un **receptor de conversión doble** lleva el principio del superheterodino un paso más adelante al incluir dos convertidores de frecuencia y dos secciones de IF. La segunda sección de IF siempre tiene sintonización fija, mientras que la primera IF y la segunda OL pueden ser fijas o sintonizables. En cualquier caso, la conversión doble permite un mayor valor de $f_{IF\text{-}1}$ para mejorar el rechazo de imagen en la sección de RF, y un menor valor de $f_{IF\text{-}2}$ para mejorar el rechazo del canal adyacente en la segunda sección de IF. Algunos receptores de alto rendimiento para SSB y AM de onda corta por lo general mejoran esta estrategia de diseño.

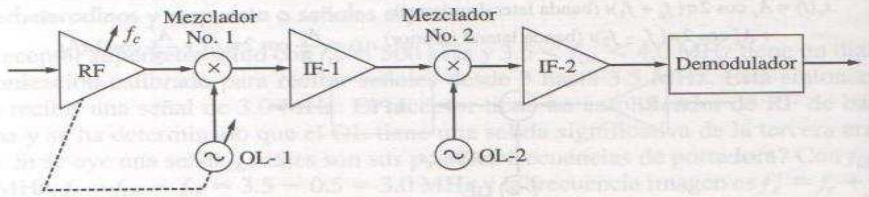


Figura 7.1-5 Receptor de conversión doble.

Obsérvese que un receptor SSB de doble conversión con detección síncrona requiere de *tres* osciladores estables más circuitería de control automático de frecuencia y de sincronización. Afortunadamente, con la tecnología de IC está disponible el **sintetizador de frecuencia** para esta aplicación. En la sección 7.3 se analizará la síntesis de frecuencia empleando el lazo de sincronización de fase.

Especificaciones del receptor

Ahora se considerarán varios parámetros que determinan la capacidad de un receptor para demodular exitosamente una señal de radio. La **sensibilidad** del receptor es el voltaje de entrada mínimo que produce una razón señal a ruido especificada en la salida de la sección de IF. Un radio de onda corta de buena calidad tiene una sensibilidad característica de $1\mu V$ para una razón señal a ruido de 40 dB. El **margen dinámico** es la diferencia entre la mayor señal de entrada que no será distorsionada y la menor señal que puede discernirse, y es un parámetro importante que se mide en dB. El margen dinámico máximo de la mayoría de los amplificadores analógicos es de 100 dB. Supóngase que se está oyendo una señal de radio AM débil y que hay una estación fuerte transmitiendo con una frecuencia significativamente diferente, pero dentro de la banda de paso del amplificador de RF. La señal intensa puede sobrecargar el amplificador de RF y de este modo elimina la señal débil. La **selectividad** especifica la capacidad de un receptor para discriminar las señales de canales adyacentes. La selectividad es una función de la banda de IF de un BPF. La **cifra de ruido** indica qué cantidad degrada el receptor la razón señal a ruido en la entrada y se calcula mediante la fórmula

$$Nf = \frac{(S/N)_{entrada}}{(S/N)_{salida}} \qquad [5]$$

Las cifras de ruido comunes están entre 5 y 10 dB. Finalmente, el **rechazo de imagen** se define como

$$RR = 10 \log |H_{RF}(f_c)/H_{RF}(f_c')|^2 \quad \text{dB} \qquad [6]$$

Un valor característico del rechazo de imagen es 50 dB. Esta ecuación también puede aplicarse a otros tipos de *entradas espurias*.

EJERCICIO 7.1-2

Supóngase que una sección de RF de un superheterodino es un circuito sintonizado típico descrito por la ecuación (17), sección 4.1, con $f_o = f_c$ y $Q = 50$. Demuéstrese que para obtener una $RR = 60$ dB se requiere que $f_c/f_c' \approx 20$ cuando $f_c' = f_c + 2f_{IF}$. Esta condición se podría cumplir fácilmente con un receptor de doble conversión con $f_{IF-1} \approx 9.5f_c$.

Analizadores de espectro de exploración★

Si el OL en un superheterodino se reemplaza por un OCV, entonces la porción de predetección actúa como un *amplificador pasa banda sintonizable por voltaje* con frecuencia central $f_0 = f_{OL} \pm f_{IF}$ y ancho de banda $B = B_{IF}$. Esta propiedad es la parte toral del *analizador de espectro de exploración* en la figura 7.1-6*a*; un instrumento de laboratorio útil que muestra la magnitud espectral de una señal de entrada en alguna banda seleccionada.

El OCV (oscilador controlado por voltaje) es excitado por un generador de rampa periódica que barre la frecuencia instantánea $f_{OL}(t)$ linealmente desde f_1 hasta f_2 en T segundos. La sección de IF tiene un ancho de banda angosto B, usualmente ajustable, y la salida IF pasa a un detector de envolvente. Por ello, la respuesta de amplitud del sistema en cualquier instante t se parece a la figura 7.1-6*b*, donde $f_0(t) = f_{OL}(t) - f_{IF}$. Un BPF (o LPF) fijo en la entrada pasa $f_1 \le f \le f_2$ al tiempo que rechaza la imagen en $f_0(t) + 2f_{IF}$.

Conforme $f_0(t)$ explora repetidamente las componentes de frecuencia de una señal de entrada $v(t)$, su espectro se despliega al conectar el detector de envolvente y el generador de rampa a las placas de deflexión vertical y horizontal de un osciloscopio. Desde luego, una señal transitoria no produciría una imagen fija, de modo que $v(t)$ debe ser una *señal periódica* o *cuasiperiódica* o bien una *señal aleatoria estacionaria* durante el tiempo de observación. En correspondencia, la imagen representa el espectro de líneas

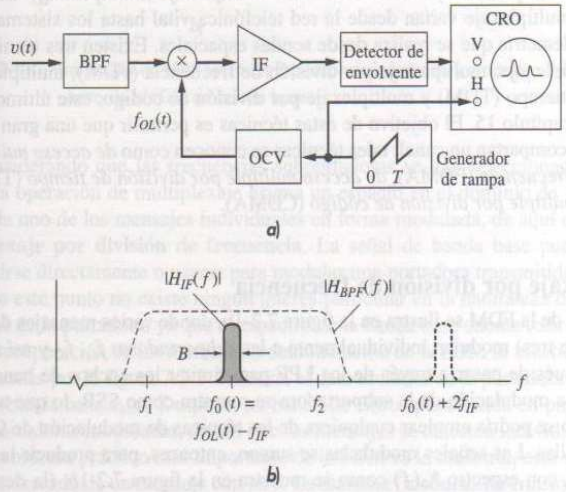


Figura 7.1-6 Analizador de espectro de exploración I. *a)* Diagrama de bloques; *b)* respuesta de amplitud.

de amplitud o la densidad espectral de potencia (para esta última se usaría un detector de envolvente de ley cuadrática).

Algunas de las ideas operacionales de este sistema se entienden mejor considerando que $v(t)$ consiste de dos o más senoides. Para distinguir una línea espectral de las otras, el ancho de banda IF debe ser menor que la separación entre líneas. Por esta razón, B se denomina *resolución de frecuencia*, y el máximo número de líneas distinguibles es igual a $(f_2 - f_1)/B$. La salida IF producida por una sola línea toma la forma de un *pulso pasabanda* con duración

$$\tau = BT/(f_2 - f_1) = B/\dot{f}_0$$

donde $\dot{f}_0 = (f_2 - f_1)/T$ representa la *tasa de barrido de frecuencia* en hertz por segundo.

Pero una tasa rápida de barrido puede exceder la respuesta al pulso de IF. Recuérdese que la regla para pulsos pasabanda requiere que $B \ge 1/\tau = \dot{f}_o/B$, o

$$\dot{f}_0 = \frac{f_2 - f_1}{T} \le B^2 \qquad [7]$$

Esta importante relación muestra que una resolución precisa (B pequeña) requiere de una tasa lenta y, en consecuencia, un tiempo de observación largo. Nótese también que la ecuación (7) incluye cuatro parámetros que el usuario puede ajustar. Algunos analizadores de espectro de exploración tienen hardware interno que evita la violación de la ecuación (7); otros simplemente tienen una luz de advertencia.

7.2 SISTEMAS DE MULTIPLEXAJE

Cuando se necesitan varios canales de comunicación entre los mismos dos puntos, es posible obtener ahorros significativos enviando todos los mensajes por un solo medio de transmisión, proceso que se conoce como *multiplexaje (multiplexing)*. Las aplicaciones del multiplexaje varían desde la red telefónica vital hasta los sistemas de FM estéreo y telemetría que se realiza desde sondas espaciales. Existen tres técnicas básicas de multiplexaje: multiplexaje por división de frecuencia (FDM), multiplexaje por división de tiempo (TDM) y multiplexaje por división de código, este último se estudiará en el capítulo 15. El objetivo de estas técnicas es permitir que una gran cantidad de usuarios compartan un canal; tales técnicas se conocen como *de acceso múltiple por división de frecuencia* (FDMA), *de acceso múltiple por división de tiempo* (TDMA), y *de acceso múltiple por división de código* (CDMA).

Multiplexaje por división de frecuencia

El principio de la FDM se ilustra en la figura 7.2-1*a*, donde varios mensajes de entrada (se muestran tres) modulan individualmente a las *subportadoras* f_{c1}, f_{c2} y así sucesivamente, después de pasar a través de los LPF para limitar los anchos de banda de los mensajes. La modulación de la subportadora se muestra como SSB, lo que a menudo sucede, pero se podría emplear cualquiera de las técnicas de modulación de OC o una mezcla de ellas. Las señales moduladas se suman, entonces, para producir la señal de *banda base*, con espectro $X_b(f)$ como se muestra en la figura 7.2-1*b*. (la designación "banda base" indica que la modulación final de la portadora todavía no ha ocurrido). La función de tiempo de la banda base $x_b(t)$ se deja a la imaginación del lector.

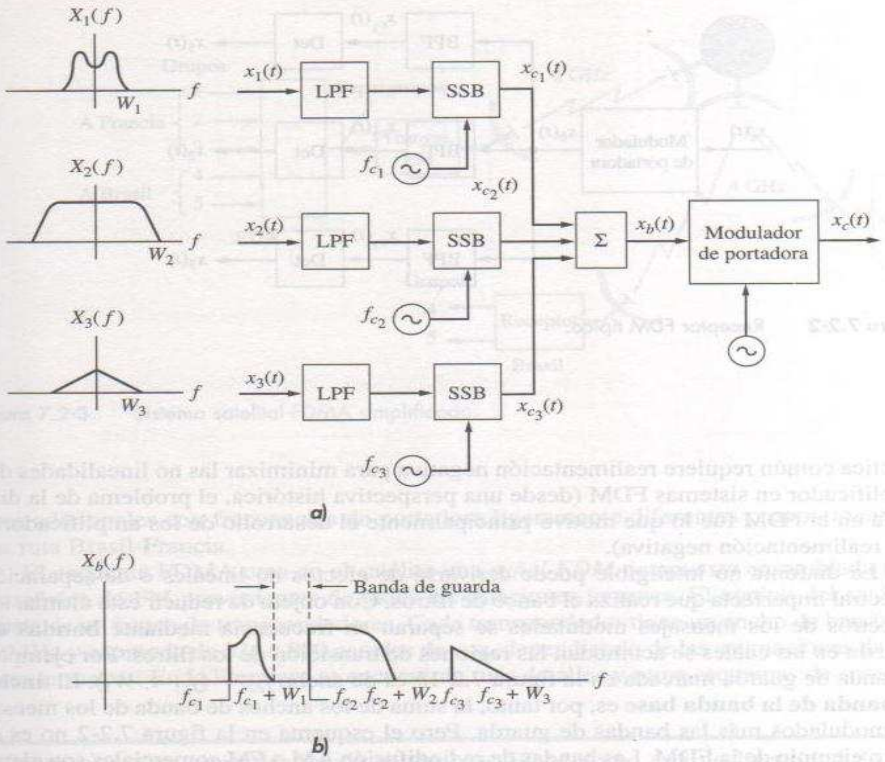


Figura 7.2-1 Transmisor de FDM típico. *a)* Espectros de la entrada y diagrama de bloques; *b)* espectro de la FDM de banda base.

Considerando que las frecuencias subportadoras se han seleccionado adecuadamente, la operación de multiplexaje asigna un espacio en el dominio de la frecuencia para cada uno de los mensajes individuales en forma modulada, de aquí el nombre de **multiplexaje por división de frecuencia**. La señal de banda base puede entonces transmitirse directamente o usarse para modular una portadora transmitida de frecuencia f_c. En este punto no existe ningún interés particular en la naturaleza de la modulación final de la portadora, ya que el espectro de la banda base cuenta toda la historia.

La recuperación de los mensajes o demodulación de la FDM se efectúa en tres etapas ilustradas por la figura 7.2-2. Primera, el demodulador de la portadora reproduce la señal de banda base $x_b(t)$. Después, un banco de filtros pasa banda en paralelo separa las subportadoras moduladas, de allí que los mensajes se detecten individualmente.

El problema práctico más importante de la FDM es la **diafonía**, esto es, el acoplamiento indeseado de un mensaje con otro. La diafonía (modulación cruzada) inteligible surge principalmente debido a no linealidades en el sistema, las cuales hacen que una señal de mensaje aparezca como modulación en otra subportadora. En consecuencia, la

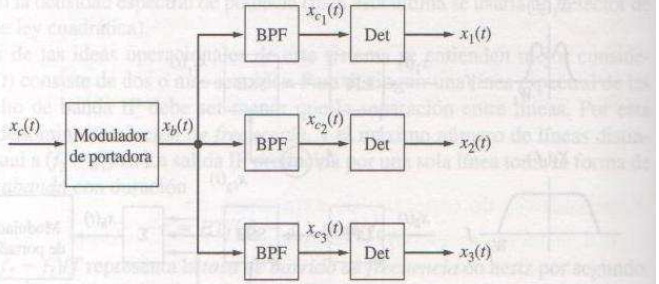


Figura 7.2-2 Receptor FDM típico.

práctica común requiere realimentación negativa para minimizar las no linealidades del amplificador en sistemas FDM (desde una perspectiva histórica, el problema de la diafonía en la FDM fue lo que motivó principalmente el desarrollo de los amplificadores con realimentación negativa).

La diafonía no inteligible puede derivarse de efectos no lineales o de separación espectral imperfecta que realiza el banco de filtros. Con objeto de reducir esta última, los espectros de los mensajes modulados se separan en frecuencia mediante **bandas de guarda** en las cuales se acomodan las regiones de transición de los filtros. Por ejemplo, la banda de guarda marcada en la figura 7.2-1*b* es de ancho $f_{c2} - (f_{c1} + W_1)$. El **ancho de banda de la banda base** es, por tanto, la suma de los anchos de banda de los mensajes modulados más las bandas de guarda. Pero el esquema en la figura 7.2-2 no es el único ejemplo de la FDM. Las bandas de radiodifusión AM o FM comerciales son ejemplos diarios de la FDMA, donde varias estaciones transmiten simultáneamente en la misma banda, pero con frecuencias ligeramente diferentes.

EJEMPLO 7.2-1 **Sistemas satelitales FDMA**

La red global Intelsat añade una tercera dimensión a la comunicación de larga distancia. Puesto que un satélite particular enlaza varias estaciones terrenas en diferentes países, se han diseñado varios métodos *de acceso* para la telefonía internacional. Un esquema, conocido como *acceso múltiple por división de frecuencia* (FDMA), asigna un número fijo de canales de voz entre pares de estaciones terrenas. Estos canales se agrupan por medio de equipo estándar de FDM y son conmutados a través del satélite usando modulación de FM de la portadora.

Como ejemplo, supóngase que un satélite sobre el océano Atlántico da servicio a estaciones terrenas en los Estados Unidos, Brasil y Francia. Suponga también que se asignan 36 canales (tres grupos) a la ruta USA-Francia y 24 canales (dos grupos) a la ruta USA-Brasil. La figura 7.2-3 muestra el arreglo del transmisor desde USA y los receptores en Brasil y Francia. No se muestran los transmisores franceses y brasileños, ni el receptor en USA necesario para conversaciones de dos vías. Transmisores y recep-

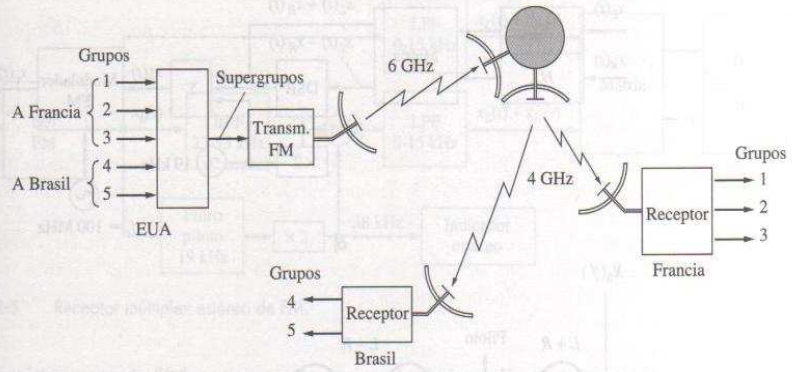


Figura 7.2-3 Sistema satelital FDMA simplificado.

tores adicionales con frecuencias de portadora ligeramente diferentes proporcionarían una ruta Brasil-Francia.

El esquema FDMA crea en el satélite una *señal FDM compuesta* ensamblada con las señales de FM provenientes de todas las estaciones terrenas. El equipo del satélite consta de un banco de transpondedores. Cada transpondedor tiene un ancho de banda de 36 MHz y acomoda de 336 a 900 canales de voz, dependiendo de las asignaciones de los pares terrestres. En la literatura se encuentran más detalles y otros esquemas de acceso.

EJERCICIO 7.2-1

Supóngase que un amplificador de banda base FDM posee una no linealidad de ley cúbica que produce una componente de banda base proporcional a $(v_2 \cos \omega_2 t)^2 v_1 \cos \omega_1 t$, donde f_1 y f_2 son dos frecuencias subportadoras. Demuéstrese que la modulación de la subportadora AM con $v_1 = 1 + x_1(t)$ y $v_2 = 1 + x_2(t)$ da como resultado diafonía inteligible y no inteligible en la subportadora f_1. Comparar este resultado con el caso DSB de $v_1 = x_1(t)$ y $v_2 = x_2(t)$.

EJEMPLO 7.2-2

Multiplexaje FM estéreo

La figura 7.2-4*a* muestra un diagrama del sistema FDM que genera la señal de banda base para radiodifusión de FM estereofónica. Las señales para los altavoces de izquierda y derecha son conducidas a una matriz y preenfatizadas primero a efecto de producir $x_L(t) + x_R(t)$ y $x_L(t) - x_R(t)$. La señal suma se escucha con un receptor monofónico; se requiere de la matriz para que el oyente monoaural sea sometido a vacíos de sonido en el material del programa que tengan efectos de ping-pong estereofónicos. La señal $x_L(t) + x_R(t)$ se inserta entonces directamente en la banda base, mientras que la DSB $x_L(t) - x_R(t)$ modula una subportadora de 38 kHz. Se emplea modulación de doble banda lateral para conservar la fidelidad a bajas frecuencias y se añade un tono piloto de 19 kHz para sincronización del receptor.

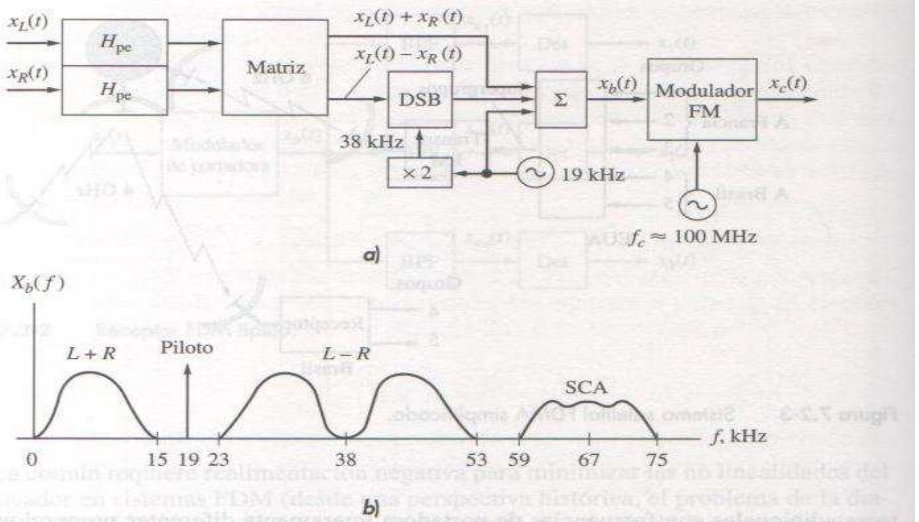


Figura 7.2-4 Multiplexaje de FM estéreo. *a*) Transmisor; *b*) espectro de banda base.

El espectro de banda base resultante se dibuja en la figura 7.2-4*b*. También se muestra otra componente espectral identificada como SCA, que son las iniciales de "Subsidiary Communication Authorization" (Autorización para Comunicación Subsidiaria). La señal SCA tiene modulación de subportadora NBFM y algunas estaciones de FM la transmiten para el uso de sus suscriptores privados quienes pagan por programas libres de comerciales; la llamada "música de fondo" que se escucha en las tiendas y en las oficinas.

Para la radiodifusión estéreo sin SCA, a la portadora piloto se le asigna el 10 por ciento de la desviación de frecuencia pico, y la relación de oscilación entre $L + R$ y $L - R$ le permite a cada una alcanzar casi 90 por ciento de desviación. El hecho de que el espectro de la banda base se extienda hasta 53 kHz (o 75 kHz con SCA) no aumenta apreciablemente el requerimiento del ancho de banda de transmisión porque las frecuencias más altas producen menores relaciones de desviación. Los receptores estéreo de alta fidelidad tienen generalmente un $B_{IF} \approx 250$ kHz.

El sistema de *desmultiplexaje* o *decodificación* se muestra en la figura 7.2-5. Obsérvese cómo el tono piloto se utiliza para accionar el indicador de estéreo y también para la detección síncrona. Los decodificadores de circuito integrado emplean circuitos de conmutación o lazos de sincronización de fase para realizar las operaciones funcionales.

Cabe señalar que la grabación de discos de cuatro canales discretos (cuadrafónica) aprovecha una extensión lógica de la estrategia de la FM estéreo para multiplexar cuatro señales independientes en los dos canales de una grabación estereofónica. Denotando las cuatro señales como L_F, L_R, R_F, y R_R (izquierda-frente, izquierda-atrás, etc.) la señal proveniente de la matriz $L_F + L_R$ se graba directamente en un canal, junto con $L_F - L_R$ multiplexada a través de la modulación de frecuencia de una subportadora de 30 kHz. Las señales a la salida de la matriz $R_F + R_R$ y $R_F - R_R$ son igualmente multiplexadas en el otro canal. Como el espectro de banda base resultante aumenta hasta 45 kHz, las señales cuadrafónicas discretas no se transmiten por completo en la FM esté-

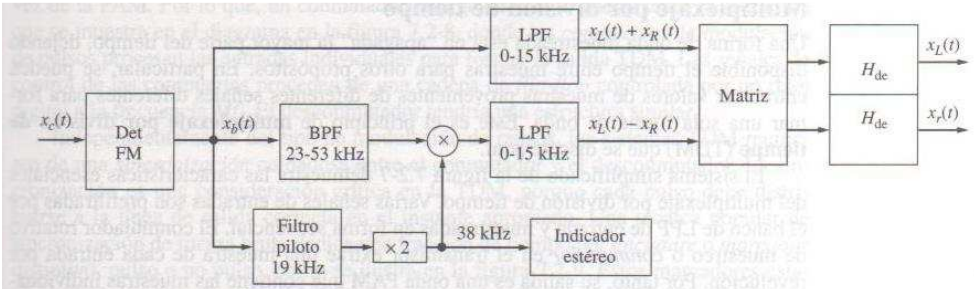


Figura 7.2-5 Receptor múltiplex estéreo de FM.

reo. Otros sistemas cuadrafónicos tienen sólo dos canales independientes y son compatibles con la FM estéreo.

Multiplexaje de portadora en cuadratura

El multiplexaje de portadora en cuadratura, también conocido como *modulación de amplitud en cuadratura* (QAM), utiliza el desplazamiento de fase de la portadora y la detección síncrona para permitir que dos señales DSB ocupen la misma banda de frecuencias. La figura 7.2-6 ilustra el arreglo de multiplexaje y desmultiplexaje. La señal transmitida tiene la forma

$$x_c(t) = A_c[x_1(t) \cos \omega_c t \pm x_2(t) \operatorname{sen} \omega_c t] \qquad [1]$$

Puesto que los espectros modulados se traslapan, esta técnica se caracteriza más adecuadamente como multiplexaje en el *dominio* de la frecuencia que como por *división* de frecuencia.

Del estudio anterior sobre la detección síncrona para DSB y SSB, se aprecia el hecho de que la QAM involucra una sincronización más estricta que, digamos, un sistema FDM con modulación SSB de subportadora. En consecuencia, la QAM está limitada a aplicaciones especializadas, de manera sobresaliente la televisión a color y la transmisión de datos digitales.

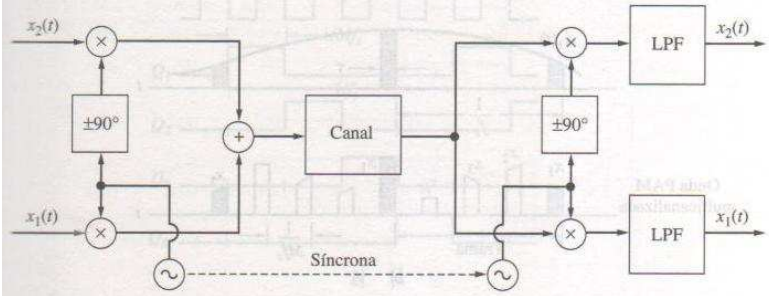


Figura 7.2-6 Multiplexaje de portadora en cuadratura.

Multiplexaje por división de tiempo

Una forma de onda muestreada está en "apagada" la mayor parte del tiempo, dejando disponible el tiempo entre muestras para otros propósitos. En particular, se pueden entrelazar valores de muestras provenientes de diferentes señales diferentes para formar una sola forma de onda. Éste es el principio de **multiplexaje por división de tiempo** (TDM) que se discute aquí.

El sistema simplificado de la figura 7.2-7 demuestra las características esenciales del multiplexaje por división de tiempo. Varias señales de entradas son prefiltradas por el banco de LPF de entrada y muestreadas en forma secuencial. El conmutador rotativo de muestreo o *conmutador* en el transmisor extrae una muestra de cada entrada por revolución. Por tanto, su salida es una onda PAM que contiene las muestras individuales entrelazadas periódicamente en el tiempo. En el receptor, un conmutador igual, llamado *desconmutador* o *distribuidor*, separa las muestras y las distribuye a otro banco de LPF para la reconstrucción de los mensajes individuales.

Si todas las entradas tienen el mismo ancho de banda W del mensaje, el conmutador debe girar a la tasa $f_s \geq 2W$ de manera que las muestras sucesivas provenientes de cualquier entrada estén separadas por $T_s = 1/f_s \leq 1/2W$. El intervalo de tiempo T_s que contiene una muestra de cada entrada se denomina *encuadre*. Si hay M canales de entrada, la separación entre pulso y pulso dentro de un encuadre es $T_s/M = 1/Mf_s$. Así que el número total de pulsos por segundo será

$$r = Mf_s \geq 2MW \qquad [2]$$

que representa la tasa de pulsos o *tasa de señalización* de la señal TDM.

El sistema primitivo estudiado aquí muestra la conmutación mecánica para generar PAM multiplexada. Sin embargo, casi todos los sistemas TDM prácticos emplean conmutación electrónica. Además, se pueden usar otros tipos de modulación de pulsos en

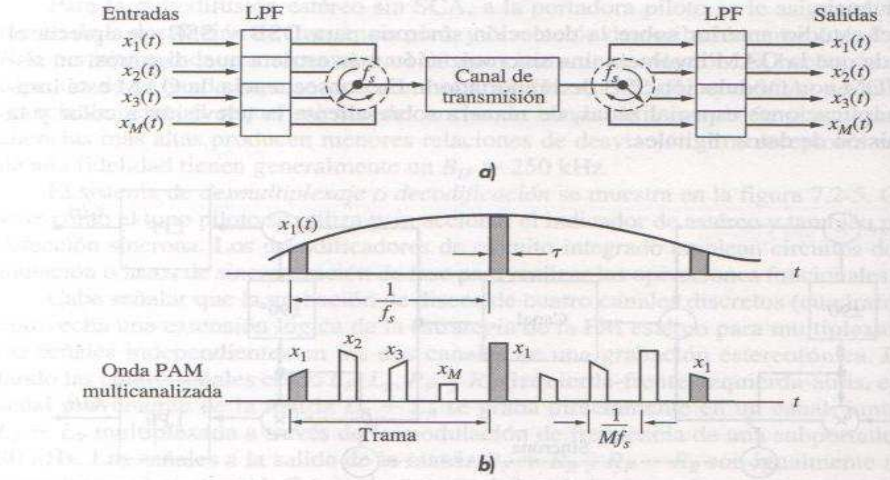


Figura 7.2-7 Sistema TDM. a) Diagrama de bloques; b) señales

vez de la PAM. Por lo que, un conmutador más generalizado podría tener la estructura que se muestra en el diagrama en la figura 7.2-8, donde las *compuertas* de modulación de pulsos procesan las entradas individuales para formar la salida TDM. Las señales de control de las compuertas proceden de una cadena de *flip-flop* controlada por un reloj digital a la frecuencia Mf_s. El desconmutador tendría una estructura similar.

Independientemente del tipo de modulación de pulsos, los sistemas TDM requieren de una *sincronización* cuidadosa entre el conmutador y el desconmutador. La sincronización es una consideración crítica en la TDM, porque cada pulso debe distribuirse a la línea de salida correcta en el instante apropiado. Una técnica popular de sincronización de fuerza bruta dedica una fracción de tiempo por *encuadre* o *marcador* distintivo, pulso o no pulso, como se ilustra en la figura 7.2-9. Estos marcadores establecen la frecuencia de encuadre f_s en el receptor, pero el número de canales de señal se reduce a $M - 1$. Otros métodos de sincronización incluyen tonos pilotos auxiliares o las propiedades estadísticas de la propia señal TDM.

En la transmisión en radiofrecuencias de la TDM, se necesita la etapa adicional de modulación de OC para obtener una señal *pasabanda*. Por ejemplo, una señal TDM compuesta por pulsos modulados en duración o en amplitud podría aplicarse a un transmisor de AM con 100 por ciento de modulación, produciendo así un tren de pulsos de

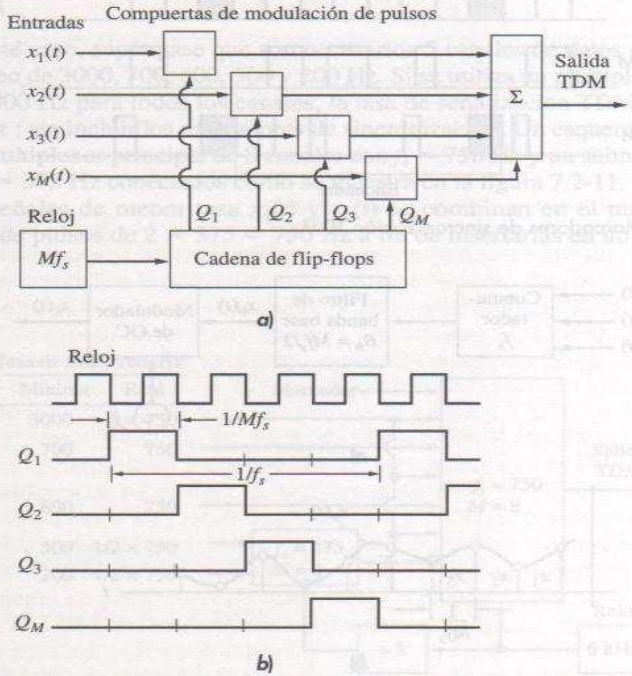


Figura 7.2-8 *a*) Conmutador electrónico para TDM; *b*) diagrama de temporización.

RF de amplitud constante. El proceso compuesto se designaría PDM/AM o PPM/AM, y el ancho de banda de transmisión requerido sería el doble del de la señal TDM de banda base. La relativa simplicidad de esta técnica la hace adecuada para aplicaciones de multicanales de baja velocidad, por ejemplo, radiocontrol de modelos de aeroplanos.

Los sistemas TDM más sofisticados pueden usar PAM/SSB para conservar el ancho de banda o PAM/FM para reducir el ruido de banda ancha. El diagrama del transmisor completo de la figura 7.2-10*a* incluye ahora una *filtro de banda base* pasabajas con ancho de banda

$$B_b = \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}Mf_s \qquad [3]$$

El filtrado de banda base previo a la modulación de OC produce una señal moduladora $x_b(t)$ suave con la propiedad de que deja pasar los valores de las muestras individuales en los instantes de muestreo correspondientes, como se ilustra en la figura 7.2-10*b*. Como el espaciamiento de las muestras entrelazadas es igual a $1/Mf_s$, el filtro de banda

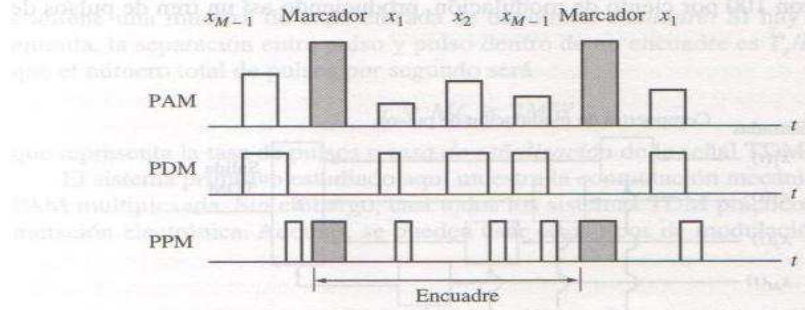


Figura 7.2-9 Marcadores de sincronización TDM.

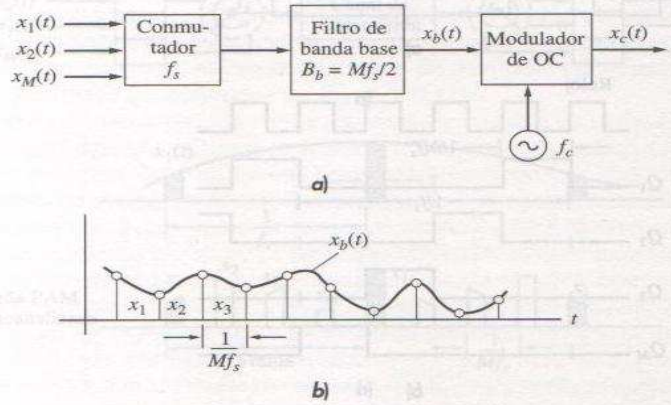


Figura 7.2-10 *a*) Transmisor TDM con filtrado pasa bajas; *b*) forma de onda de banda base.

base construye a $x_b(t)$ de la misma forma en que un LPF con $B = f_s/2$ reconstruiría una señal $x(t)$ a partir de sus muestras periódicas $x(kT_s)$ con $T_s = 1/f_s$.

Si se emplea filtrado de banda base y si la frecuencia de muestreo está cerca de la tasa de Nyquist $f_{s_{mín}} = 2W$ para las entradas individuales, entonces el ancho de banda de transmisión para PAM/SSB es

$$B_T = \tfrac{1}{2}M \times 2W = MW$$

En estas condiciones, la TDM se aproxima al *ancho de banda mínimo* teórico de multiplexaje por división de frecuencia con modulación SSB de la portadora.

Aunque se ha asumido hasta ahora que todas las señales de entrada tienen el mismo ancho de banda, esta restricción no es esencial y, además, sería irreal para el caso importante de la telemetría de datos analógicos. El objetivo de un sistema de telemetría es combinar y transmitir datos de mediciones físicas desde fuentes diferentes en alguna localización remota. La frecuencia de muestreo requerida para una medición específica depende del proceso físico involucrado y varía desde una fracción de un hertz hasta varios kilohertz. Un sistema de telemetría típico tiene un *multiplexor principal* y *submultiplexores* arreglados para manejar 100 o más canales de datos con tasas de muestreo diferentes.

Telemetría TDM **EJEMPLO 7.2-3**

Para ilustrar este caso, supóngase que son necesarios 5 canales de datos con tasas mínimas de muestreo de 3000, 700, 600, 300 y 200 Hz. Si se utiliza un multiplexor de 5 canales con $f_s = 3000$ Hz para todos los canales, la tasa de señalización TDM sería $r = 5 \times 3000 = 15$ kHz ; sin incluir los marcadores de sincronización. Un esquema más eficiente involucra un multiplexor principal de 8 canales con $f_s = 750$ Hz y un submultiplexor de 2 canales con $f_s = 375$ Hz conectados como se muestra en la figura 7.2-11.

Las dos señales de menor tasa $x_4(t)$ y $x_5(t)$ se combinan en el multiplexor para crear una tasa de pulsos de $2 \times 375 = 750$ Hz a fin de insertarlas en un canal del multiplexor principal. Por tanto, las muestras de $x_4(t)$ y $x_5(t)$ aparecerán en *encuadre s alternas*. Por otra parte, la señal de mayor tasa, $x_1(t)$ se aplica a cuatro entradas en el multiplexor principal. En consecuencia, sus muestras aparecen en cuatro espacios equidistantes dentro de cada *encuadre*, para una tasa de muestreo equivalente de $4 \times 750 = 3000$ Hz. La tasa de señalización total de la salida, incluyendo un marcador, es $r = 8 \times 750$ Hz $= 6$ kHz. El filtrado de banda base produciría una señal suavizada cuyo ancho de banda $B_b = 3$ kHz se acomoda bien en un canal telefónico de voz.

Señal	Tasa de muestreo, Hz: Mínima	Real
$x_1(t)$	3000	4×750
$x_2(t)$	700	750
$x_3(t)$	600	750
$x_4(t)$	300	$1/2 \times 750$
$x_5(t)$	200	$1/2 \times 750$

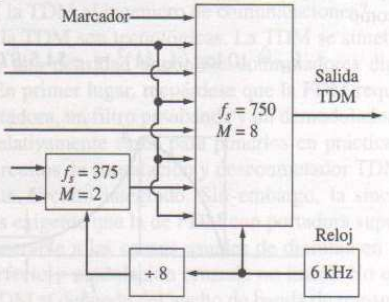


Figura 7.2-11 Sistema de telemetría TDM con un multiplexor principal y un submultiplexor.

EJERCICIO 7.2-2 Supóngase que la salida en la figura 7.2-11 es una señal PAM sin filtrar con 50 por ciento de ciclo de trabajo. Dibujar la señal para dos encuadres consecutivos, identificando cada pulso con su señal fuente. Calcular después el ancho de banda de transmisión B_T requerido usando la ecuación (6), sección 6.2.

Diafonía y tiempos de guarda

Cuando un sistema TDM incluye filtrado de banda base, el diseño del filtro debe hacerse con sumo cuidado para evitar la *diafonía* entre canales, de un valor de muestra al siguiente dentro del encuadre. Las señales digitales sufren un problema semejante llamado *interferencia intersímbolos*, y se dejará para la sección 11.3 el tratamiento de la conformación de la señal de banda base.

Una señal TDM sin filtrado de banda base también sufre de diafonía si el canal de transmisión resulta en pulsos cuyas colas o poscursores se traslapan con el siguiente intervalo de tiempo del encuadre. El traslape de pulsos se controla estableciendo *tiempos de guarda* entre pulsos, análogos a las bandas de guarda entre canales en un sistema FDM. Los sistemas TDM prácticos poseen tanto tiempos de guarda como bandas de guarda. Los primeros suprimen la diafonía en tanto que los segundos facilitan la reconstrucción del mensaje con filtros no ideales.

Para una estimación cuantitativa de la diafonía, asúmase que el canal de transmisión actúa como un filtro pasabajas de primer orden con un ancho de banda B a 3 dB. Entonces, la respuesta a un pulso rectangular decae exponencialmente, como se ilustra en la figura 7.2-12. El tiempo de guarda T_g representa la separación *mínima* entre pulsos, de modo que la cola del pulso decae a un valor no mayor que $A_{ct} = Ae^{-2\pi BT_g}$ al llegar el tiempo del siguiente pulso. En consecuencia, el *factor de reducción de diafonía* se define como

$$k_{ct} \triangleq 10 \log (A_{ct}/A)^2 \approx -54.5\, BT_g \quad \text{dB} \qquad [4]$$

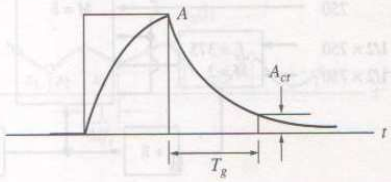


Figura 7.2-12 Diafonía en TDM.

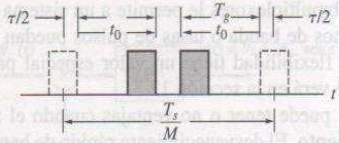


Figura 7.2-13 TDM/PPM con tiempo de guarda.

Para mantener la diafonía por debajo de −30 dB se necesita que $T_g > 1/2B$.

Los tiempos de guarda son especialmente importantes en la TDM con modulación de la duración o de la posición del pulso, porque los bordes del pulso se mueven dentro de sus asignaciones de encuadre. Considérese el caso PPM en la figura 7.2-13: aquí, un pulso se ha modulado por posición hacia adelante por una cantidad t_0 y el pulso siguiente hacia atrás por la misma cantidad. La tolerancia del tiempo de guarda T_g requiere que $T_g + 2t_0 + 2(\tau/2) \leq T_s/M$ o

$$t_0 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{T_s}{M} - \tau - T_g\right) \qquad [5]$$

En el caso de la PDM se aplica un límite similar para la modulación.

EJERCICIO 7.2-3

Se desea transmitir nueve señales de voz más un marcador usando PPM por un canal con $B = 400$ kHz. Calcular T_g de manera que $k_{ct} \approx -60$ dB. Determínese después el valor máximo permitido de t_0 si $f_s = 8$ kHz y $\tau = \frac{1}{5}(T_s/M)$.

Comparación de la TDB y la FDM

Con el multiplexaje por división de tiempo o de frecuencia se logra el mismo objetivo por medios diferentes. De hecho, se clasifican como técnicas *duales*. Los canales TDM individuales se asignan a *intervalos de tiempo* diferentes pero se revuelven todos en el dominio de la frecuencia; de manera inversa, los canales FDM individuales se asignan a *intervalos de frecuencia* diferentes pero se revuelven todos en el dominio del tiempo. ¿Qué ventajas ofrece, entonces, la TDM al ingeniero de comunicaciones?

Muchas de las ventajas de la TDM son tecnológicas. La TDM se sintetiza rápidamente con circuitería VLSI de alta densidad donde los conmutadores digitales son extremadamente económicos. En primer lugar, recuérdese que la FDM requiere de un modulador analógico de subportadora, un filtro pasabanda y un demodulador para cada canal de mensajes; éstos son relativamente caros para ponerlos en práctica en VLSI, pero se reemplazan mediante circuitos de comutación y desconmutador TDM, los cuales se colocan fácilmente en un circuito integrado. Sin embargo, la sincronización TDM es solamente un poco más exigente que la de FDM con portadora suprimida.

Segundo, la TDM es invulnerable a las causas usuales de diafonía en la FDM, a saber: filtrado pasabanda imperfecto y modulación cruzada no lineal. No obstante, la inmunidad a la diafonía de la TDM sí depende del ancho de banda de transmisión y de la ausencia de distorsión por retardo.

Tercero, el uso de submultiplexores le permite a un sistema TDM acomodar diferentes señales cuyos anchos de banda o tasas de pulsos puedan diferir por más de un orden de magnitud. Esta flexibilidad tiene un valor especial para el multiplexaje de señales digitales, como se verá en la sección 12.5.

Finalmente, la TDM puede tener o no ventajas cuando el medio de transmisión está sujeto a **desvanecimiento**. El desvanecimiento rápido de banda ancha podría dañar solamente pulsos ocasionales en un canal TDM dado, mientras que todos los canales FDM serían afectados. Empero, el desvanecimiento lento de banda angosta borra todos los canales TDM, mientras que podría dañar sólo un canal FDM.

Muchos sistemas como los relevos satelitales son un híbrido de la FDMA y la TDMA. Por ejemplo, existe FDMA donde canales de frecuencia específicos se asignan a diferentes servicios. A su vez, los usuarios individuales con TDMA pueden compartir cada canal.

7.3 LAZOS DE SINCRONIZACIÓN DE FASE (PLL)

El lazo de sincronización de fase (PLL) es indudablemente el bloque de construcción más versátil disponible para los sistemas de modulación de OC. Los PLL se encuentran en moduladores, demoduladores, sintetizadores de frecuencia, multiplexores y en una gran variedad de procesadores de señales. Algunas de estas aplicaciones se ilustrarán luego de discutir la operación del PLL y las condiciones de enganche. Este estudio introductorio proporciona un conocimiento útil de los PLL, pero no entra en un análisis detallado de la conducta no lineal y de los transitorios. En Lindsey (1972), Blanchard (1976), Gardner (1979) y Meyr y Ascheid (1990) se desarrollan con mayor profundidad estos temas.

Operación y enganche del PLL

El objetivo básico de un PLL es *enganchar* o *sincronizar* el ángulo instantáneo (esto es, fase y frecuencia) de una salida de un OCV con el ángulo instantáneo de una señal pasabanda externa que pueda tener algún tipo de modulación de OC. Con este propósito, el PLL debe realizar una *comparación de fase*. Por esta razón se iniciará con un breve estudio de los comparadores de fase.

El sistema de la figura 7.3-1*a* es un **comparador de fase analógico**. Produce una salida $y(t)$ que depende de la diferencia angular instantánea entre dos señales pasabanda de entrada, $x_c(t) = A_c \cos \theta_c(t)$ y $v(t) = A_v \cos \theta_v(t)$. Específicamente, si

$$\theta_v(t) = \theta_c(t) - \epsilon(t) + 90° \qquad [1]$$

y si el LPF simplemente extrae el término de la diferencia de frecuencia del producto $x_c(t)v(t)$, entonces

$$y(t) = \tfrac{1}{2} A_c A_v \cos [\theta_c(t) - \theta_v(t)]$$
$$= \tfrac{1}{2} A_c A_v \cos [\epsilon(t) - 90°] = \tfrac{1}{2} A_c A_v \operatorname{sen} \epsilon(t)$$

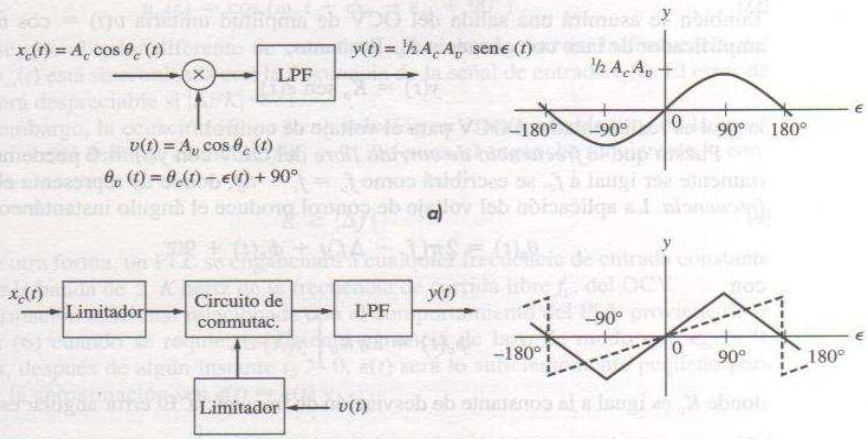


Figura 7.3-1 Comparadores de fase. *a)* Analógico; *b)* digital.

$\epsilon(t)$ se interpreta como el *error angular*, y la gráfica de y *versus* ϵ enfatiza que $y(t) = 0$ cuando $\epsilon(t) = 0$. Si se hubiera omitido el desplazamiento de 90° en la ecuación (1), se obtendría $y(t) = 0$ en $\epsilon(t) = \pm 90°$. Por ello, una salida de cero del comparador de fase corresponde a una relación de fase de *cuadratura*.

Obsérvese también que $y(t)$ depende de $A_c A_v$ cuando $\epsilon(t) \neq 0$, lo que podría causar problemas si las señales de entrada tienen modulación de amplitud. Estos problemas desaparecen con el *comparador digital de fase* de la figura 7.3-1*b*, en el cual limitadores duros convierten senoidales de entrada en ondas cuadradas aplicadas a un circuito de conmutación. La gráfica resultante de y *versus* ϵ tiene una forma de diente de sierra o triangular, dependiendo de los detalles en el circuito de conmutación. Sin embargo, las tres curvas de comparación de fase son esencialmente las mismas cuando $|\epsilon(t)| \ll 90°$ que es la condición de operación buscada en un PLL.

De aquí en adelante se trabajará con la estructura PLL analógica en la figura 7.3-2. Por simplicidad, se asumirá que la señal externa de entrada tiene amplitud constante $A_c = 2$ de manera que $x_c(t) = 2 \cos\theta_c(t)$ donde, igual que antes,

$$\theta_c(t) = \omega_c t + \phi(t) \qquad \omega_c = 2\pi f_c \qquad [2]$$

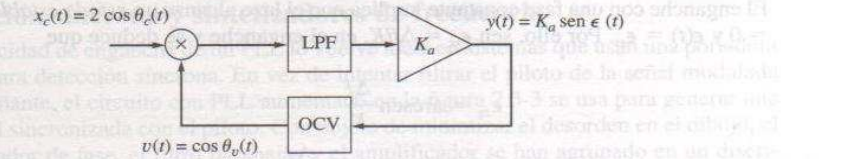


Figura 7.3-2 Lazo de sincronización de fase.

También se asumirá una salida del OCV de amplitud unitaria $v(t) = \cos\theta_v(t)$ y un amplificador de lazo con ganancia K_a. Por tanto,

$$y(t) = K_a \operatorname{sen}\epsilon(t) \qquad [3]$$

la cual es realimentada al OCV para el voltaje de control.

Puesto que la *frecuencia de corrida libre* del OCV con $y(t) = 0$ puede no necesariamente ser igual a f_c, se escribirá como $f_v = f_c - \Delta f$, donde Δf representa el *error en frecuencia*. La aplicación del voltaje de control produce el ángulo instantáneo

$$\theta_v(t) = 2\pi(f_c - \Delta f)t + \phi_v(t) + 90° \qquad [4a]$$

con

$$\phi_v(t) = 2\pi K_v \int^t y(\lambda)\, d\lambda \qquad [4b]$$

donde K_v es igual a la constante de desviación de frecuencia. El error angular es entonces

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \theta_c(t) - \theta_v(t) + 90° \\ &= 2\pi\Delta f t + \phi(t) - \phi_v(t)\end{aligned}$$

y derivando con respecto a t da

$$\dot{\epsilon}(t) = 2\pi\Delta f + \dot{\phi}(t) - 2\pi K_v\ y(t)$$

Al combinar esta expresión con la ecuación (3), se obtiene la *ecuación diferencial no lineal*.

$$\dot{\epsilon}(t) + 2\pi K \operatorname{sen}\epsilon(t) = 2\pi\Delta f + \dot{\phi}(t) \qquad [5]$$

en la cual se introdujo la *ganancia del lazo*

$$K \triangleq K_v K_a$$

Esta ganancia se mide en *hertz* y resulta ser un parámetro crítico.

La ecuación (5) rige la operación dinámica de un PLL, pero no produce una solución en forma cerrada para una $\phi(t)$ arbitraria. Para obtener una idea del comportamiento del PLL y de las condiciones de enganche, considérese el caso de una fase de entrada constante $\phi(t) = \phi_0$ que comienza en $t = 0$. Entonces $\dot{\phi}(t) = 0$ y se reescribe la ecuación (5) como

$$\frac{1}{2\pi K}\dot{\epsilon}(t) + \operatorname{sen}\epsilon(t) = \frac{\Delta f}{K} \qquad t \geq 0 \qquad [6]$$

El enganche con una fase constante implica que el lazo alcanza un *estado estable* con $\dot{\epsilon}(t) = 0$ y $\epsilon(t) = \epsilon_{ss}$. Por ello, $\operatorname{sen}\epsilon_{ss} = \Delta f/K$, en el enganche y se deduce que

$$\epsilon_{ss} = \operatorname{arcsen}\frac{\Delta f}{K} \qquad [7a]$$

$$y_{ss} = K_a \operatorname{sen}\epsilon_{ss} = \frac{\Delta f}{K_v} \qquad [7b]$$

$$v_{ss}(t) = \cos(\omega_c t + \phi_0 - \epsilon_{ss} + 90°) \qquad [7c]$$

Obsérvese que el valor diferente de cero de y_{ss} cancela el error en la frecuencia del OCV, y $v_{ss}(t)$ está sincronizada con la frecuencia de la señal de entrada $x_c(t)$. El error de fase ϵ_{ss} será despreciable si $|\Delta f/K| \ll 1$.

Sin embargo, la ecuación (6) *no tiene solución en estado estable* y ϵ_{ss} en la ecuación (7*a*) no está definido cuando $|\Delta f/K| > 1$. Así pues, el enganche requiere de la condición

$$K \geq |\Delta f| \qquad [8]$$

Dicho de otra forma, un PLL se enganchará a cualquier frecuencia de entrada constante dentro de la banda de $\pm K$ hertz de la frecuencia de corrida libre f_v. del OCV.

Información adicional relacionada con el comportamiento del PLL proviene de la ecuación (6) cuando se requiere suficiente ganancia de lazo de modo que $\epsilon_{ss} \approx 0$. Entonces, después de algún instante $t_0 > 0$, $\epsilon(t)$ será lo suficientemente pequeño para justificar la aproximación sen $\epsilon(t) \approx \epsilon(t)$ y

$$\frac{1}{2\pi K}\dot{\epsilon}(t) + \epsilon(t) = 0 \qquad t \geq t_0 \qquad [9a]$$

Esta ecuación lineal da la conocida solución

$$\epsilon(t) = \epsilon(t_0)e^{-2\pi K(t-t_0)} \qquad t \geq t_0 \qquad [9b]$$

un error *transitorio* que virtualmente desaparece después de cinco constantes de tiempo, esto es, $\epsilon(t) \approx 0$ para $t > t_0 + 5/(2\pi K)$. Se deduce entonces que si la entrada $x_c(t)$ tiene una fase *variante en el tiempo* $\phi(t)$ cuyas variaciones son lentas comparadas con $1/(2\pi K)$, y si la frecuencia instantánea $f_c + \dot{\phi}(t)/2\pi$ no excede el intervalo de $f_v \pm K$, entonces el PLL permanecerá en enganche y seguirá $\phi(t)$ con error despreciable, a condición de que LPF en el comparador de fase pase las variaciones de $\phi(t)$ al OCV.

EJERCICIO 7.3-1

La gráfica *en el plano de fase* de $\dot{\epsilon}$ *versus* ϵ se define al reescribir la ecuación (6) en la forma

$$\dot{\epsilon} = 2\pi(\Delta f - K \text{ sen } \epsilon)$$

a) Grafique $\dot{\epsilon}$ *versus* ϵ para $K = 2\ \Delta f$ y demuestre que un valor inicial arbitrario $\epsilon(0)$ debe tender a $\epsilon_{ss} = 30° \pm m\ 360°$, donde m es un entero. *Sugerencia:* $\epsilon(t)$ aumenta cuando $\dot{\epsilon}(t) > 0$, y disminuye cuando $\dot{\epsilon}(t) < 0$. *b*) Ahora grafique la gráfica en el plano de fase para $K < \Delta f$ y demuestre así que $|\dot{\epsilon}(t)| > 0$ para cualquier $\epsilon(t)$ y, en consecuencia, ϵ_{ss} no existe.

Detección síncrona y sintetizadores de frecuencia

La capacidad de enganche de un PLL lo vuelve ideal en sistemas que usan una portadora piloto para detección síncrona. En vez de intentar filtrar el piloto de la señal modulada acompañante, el circuito con PLL aumentado en la figura 7.3-3 se usa para generar una senoidal sincronizada con el piloto. Con objeto de minimizar el desorden en el dibujo, el comparador de fase, el filtro pasabajas y el amplificador se han agrupado en un discriminador de fase (PD), y se han asumido amplitudes senoidales unitarias en todas partes.

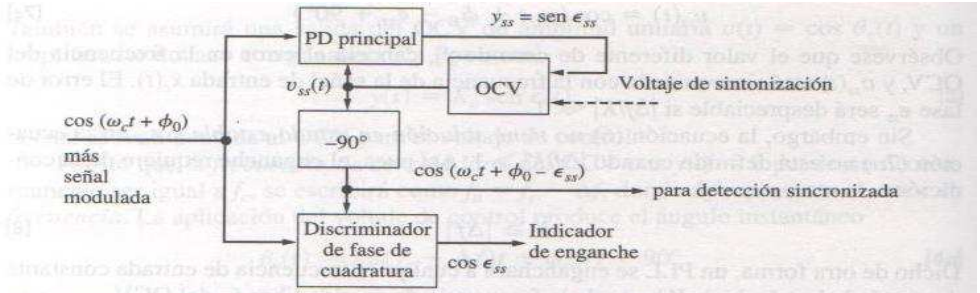


Figura 7.3-3 Filtro piloto PLL con dos discriminadores de fase (PD).

El ajuste inicial del voltaje de sintonización lleva la frecuencia del OCV cerca a f_c y $\epsilon_{ss} \approx 0$, una condición que es percibida por el discriminador de fase de cuadratura y mostrada por el indicador de enganche. En adelante, el PLL sigue automáticamente cualquier desvío de fase o de frecuencia en el piloto, y la salida del OCV desplazada en fase proporciona la señal OL necesaria para el detector síncrono. Así pues, toda la unidad actúa como un *filtro piloto de banda angosta* con una salida prácticamente sin ruido.

Cabe señalar que un arreglo como el de la figura 7.3-3 se usa para *buscar* una señal en alguna frecuencia desconocida. Se desconecta el voltaje de control del OCV y se aplica un generador de rampa para barrer la frecuencia del OCV hasta que el indicador de enganche muestre que se ha encontrado una señal. Algunos rastreadores de radio emplean una versión automatizada de este procedimiento.

Para la *detección síncrona* de la DSB sin un piloto transmitido, Costas inventó el sistema PLL de la figura 7.3-4. La señal $x(t)$ cos $\omega_c t$ modulada de DSB con ancho de banda $2W$ se aplica a un par de discriminadores de fase cuyas salidas son proporcionales a $x(t)$ sen ϵ_{ss} y a $x(t)$ cos ϵ_{ss}. Multiplicando e integrando en $T \gg 1/W$ se produce el voltaje de control del OCV

$$y_{ss} \approx T\langle x^2(t)\rangle \text{ sen } \epsilon_{ss} \cos \epsilon_{ss} = \frac{T}{2} S_x \text{ sen } 2\epsilon_{ss}$$

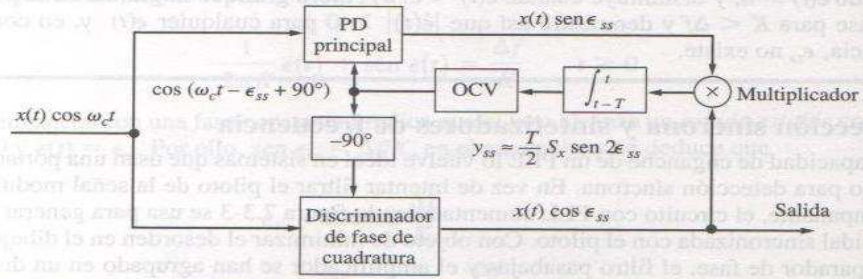


Figura 7.3-4 Sistema PLL de Costas para detección síncrona.

Si $\Delta f \approx 0$, el PLL entra en sincronía cuando $\epsilon_{ss} \approx 0$ y la salida del discriminador de cuadratura es proporcional al mensaje demodulado $x(t)$. Por supuesto, el lazo pierde la sincronía si $x(t) = 0$ durante un intervalo largo.

El *lazo de desviación de frecuencia* de la figura 7.3-5 traslada la frecuencia de entrada (y la fase) en una cantidad igual que la de un oscilador auxiliar. La frecuencia de salida deseada es ahora $f_c + f_1$, de manera que la frecuencia de corrida libre del OCV debe ser

$$f_v = (f_c + f_1) - \Delta f \approx f_c + f_1$$

Las salidas del oscilador y del OCV se mezclan y se filtran para obtener la señal con diferencia de frecuencia cos $[\theta_v(t) - (\omega_1 t + \phi_1)]$ que se aplica al discriminador de fase. En condiciones de enganche o sincronía con $\epsilon_{ss} \approx 0$, los ángulos instantáneos en la entrada del discriminador diferirán en 90°. Por tanto, $\theta_v(t) - (\omega_1 t + \phi_1) = \omega_c t + \phi_0 + 90°$, y el OCV produce cos $[(\omega_c + \omega_1)t + \phi_0 + \phi_1 + 90°]$.

Igualando de la misma forma los ángulos instantáneos, se confirma que la figura 7.3-6 realiza la *multiplicación de frecuencia*. Al igual que el multiplicador de frecuencia discutido en la sección 5.2, esta unidad multiplica el ángulo instantáneo de la entrada por un factor de n. No obstante, lo hace con ayuda de un *divisor de frecuencia* el cual se realiza fácilmente usando un *contador digital*. Algunos contadores que dividen entre n disponibles comercialmente permiten seleccionar cualquier valor entero de n desde 1 hasta 10 o incluso mayores. Cuando este tipo de contador se inserta en un PLL, se tiene un multiplicador de frecuencia *ajustable*.

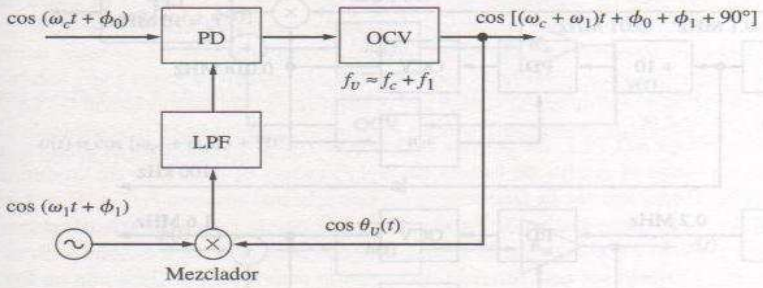


Figura 7.3-5 Lazo de desviación de frecuencia.

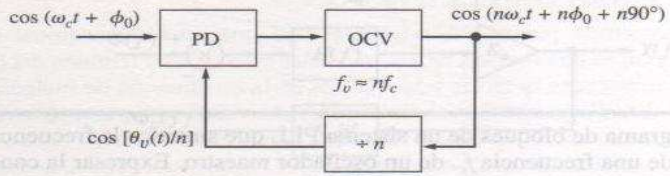


Figura 7.3-6 Multiplicador de frecuencia PLL.

Un *sintetizador de frecuencia* comienza con la salida de un oscilador maestro controlado por cristal; otras frecuencias diferentes se sintetizan a partir de combinaciones de división, multiplicación y traslación de frecuencias. De este modo, el oscilador maestro estabiliza y sincroniza todas las frecuencias resultantes. Existen ciertos sintetizadores de laboratorio para propósitos generales que incorporan refinamientos adicionales y tienen diagramas bastante complicados. Se ilustrará ahora el principio de la síntesis de frecuencia mediante un ejemplo.

EJEMPLO 7.3-1

Supóngase que un receptor de SSB de doble conversión necesita frecuencias del OL fijas en 100 kHz (para detección síncrona) y de 1.6 MHz (para el segundo mezclador), y un OL ajustable que cubre 9.90-9.99 MHz en pasos de 0.01 MHz (para sintonización de RF). El sintetizador específico de la figura 7.3-7 proporciona todas las frecuencias requeridas mediante división, multiplicación y mezclando con la salida de un oscilador de 10 MHz. El sistema se puede verificar rápidamente colocando un bloque de multiplicación de frecuencias en el lugar de cada PLL con un divisor.

Observar aquí que todas las frecuencias de salida son *menores* que la frecuencia del oscilador maestro. Esto asegura que cualquier desviación de frecuencia se reducirá, antes que aumentar, debido a las operaciones de síntesis.

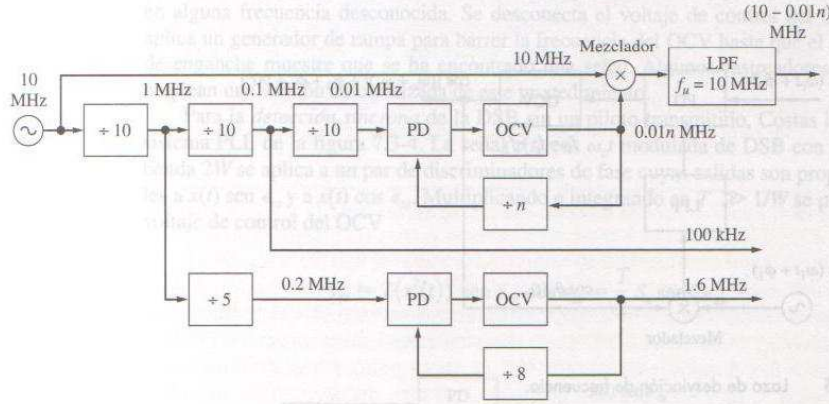


Figura 7.3-7 Sintetizador de frecuencia con salidas fijas y ajustables.

EJERCICIO 7.3-2

Dibujar el diagrama de bloques de un sistema PLL que sintetice la frecuencia de salida nf_c/m a partir de una frecuencia f_c. de un oscilador maestro. Expresar la condición para la operación de enganche en función de la ganancia del lazo K y la frecuencia de corrida libre del OCV f_v.

Modelos del PLL linealizados y detección de FM

Supóngase que un PLL se ha sintonizado para sincronizarse con la frecuencia de entrada f_c, de modo que $\Delta f = 0$. Supóngase también que el PLL tiene una ganancia de lazo suficiente para seguir la fase de entrada $\phi(t)$ con un pequeño error $\epsilon(t)$, tal que sen $\epsilon(t) \approx \epsilon(t) = \phi(t) - \phi_v(t)$. Estas suposiciones constituyen la base para el *modelo PLL linealizado* de la figura 7.3-8*a*, donde el LPF se ha representado mediante su respuesta al impulso $h(t)$.

Puesto que el análisis se abocará ahora a las variaciones de fase, se considerará que $\phi(t)$ es la "señal" de entrada, la cual se compara con la "señal" realimentada

$$\phi_v(t) = 2\pi K_v \int^t y(\lambda)\, d\lambda$$

para producir la salida $y(t)$. Con objeto de enfatizar este punto de vista, se dibuja de nuevo el modelo linealizado como un *sistema con realimentación negativa*, figura 7.3-8*b*. Obsérvese que el OCV se convierte en un integrador con ganancia $2\pi K_v$, mientras que la comparación de fase se convierte en una resta.

La transformación de Fourier lleva finalmente al *modelo en el dominio de la frecuencia* de la figura 7.3-8*c*, donde $\Phi(f) = \mathcal{F}[\phi(t)]$, $H(f) = \mathcal{F}[h(t)]$, etc. Un análisis rutinario arroja

$$Y(f) = \frac{K_a H(f)}{1 + K_a H(f)(K_v/jf)}\Phi(f) = \frac{1}{K_v}\frac{jfKH(f)}{jf + KH(f)}\Phi(f) \qquad [10]$$

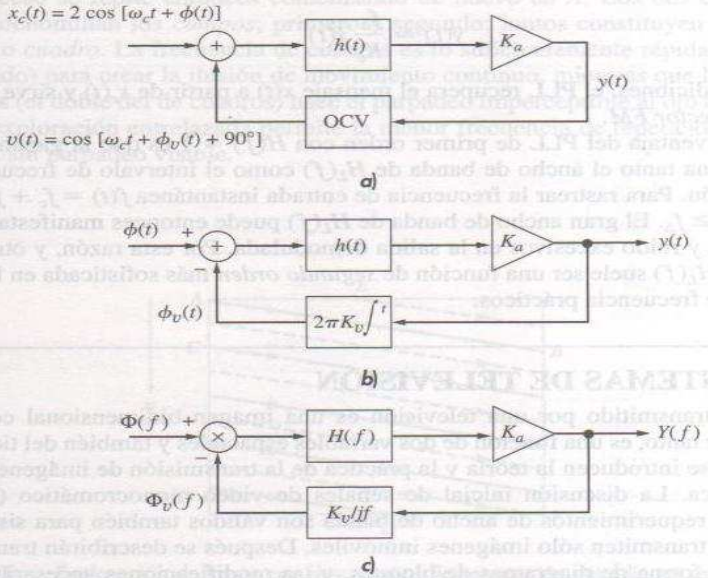


Figura 7.3-8 Modelos PLL linealizados. *a*) Dominio del tiempo; *b*) fase; *c*) dominio de frecuencia.

que expresa la relación en el dominio de la frecuencia entre la fase de entrada y el voltaje de salida.

Supóngase ahora que $x_c(t)$ es una *onda FM* con $\dot{\phi}(t) = 2\pi f_\Delta\, x(t)$ y, en consecuencia,

$$\Phi(f) = 2\pi f_\Delta\, X(f)/(j2\pi f) = (f_\Delta/jf)X(f)$$

Sustituyendo por $\Phi(f)$ en la ecuación (10) se tiene

$$Y(f) = \frac{f_\Delta}{K_v} H_L(f)X(f) \qquad [11a]$$

donde

$$H_L(f) = \frac{H(f)}{H(f) + j(f/K)} \qquad [11b]$$

ecuación que se interpreta como la *función de transferencia del lazo* equivalente. Si $X(f)$ tiene un ancho de banda del mensaje W y si

$$H(f) = 1 \qquad |f| \le W \qquad [12a]$$

entonces $H_L(f)$ toma la forma de un *filtro pasabajas de primer orden* con un ancho de banda K, a, 3 dB igual vale decir,

$$H_L(f) = \frac{1}{1 + j(f/K)} \qquad |f| \le W \qquad [12b]$$

Así que $Y(f) \approx (f_\Delta/K_v)X(f)$ cuando $K \ge W$ así que

$$y(t) \approx \frac{f_\Delta}{K_v} x(t) \qquad [13]$$

En estas condiciones, el PLL recupera el mensaje $x(t)$ a partir de $x_c(t)$ y sirve por tanto como un *detector FM*.

Una desventaja del PLL de primer orden con $H(f) = 1$ es que la ganancia K del lazo determina tanto el ancho de banda de $H_L(f)$ como el intervalo de frecuencias de sincronización. Para rastrear la frecuencia de entrada instantánea $f(t) = f_c + f_\Delta x(t)$ hay que tener $K \ge f_\Delta$. El gran ancho de banda de $H_L(f)$ puede entonces manifestarse como interferencia y ruido excesivos en la salida demodulada. Por esta razón, y otras consideraciones, $H_L(f)$ suele ser una función de *segundo orden* más sofisticada en los detectores PLL de frecuencia prácticos.

7.4 SISTEMAS DE TELEVISIÓN

El mensaje transmitido por una televisión es una imagen bidimensional con movimiento y, por tanto, es una función de dos variables espaciales y también del tiempo. En esta sección se introducen la teoría y la práctica de la transmisión de imágenes vía una señal eléctrica. La discusión inicial de señales de video monocromático (blanco y negro) y los requerimientos de ancho de banda son válidos también para sistemas de facsímil que transmiten sólo imágenes inmóviles. Después se describirán transmisores de TV, en la forma de diagramas de bloques, y las modificaciones necesarias para la televisión a color.

Hay varios tipos de sistemas de televisión en diferentes países con numerosas variaciones. Se abordará básicamente el sistema NTSC (National Television Systems Committee) empleado en Estados Unidos, Sudamérica y Japón, y su reemplazo digital, el HDTV (high definition television). En Whitaker (1999) y ATSC (1995) se darán más detalles acerca de la HDTV.

Señales de video, resolución y ancho de banda

Para comenzar con el caso más sencillo, considérese un patrón de intensidad monocromática libre de movimiento $I(h, v)$, donde h y v son las coordenadas horizontal y vertical. Convertir $I(h, v)$ en una señal $x(t)$ —y viceversa— requiere de un proceso de transformación (mapeo) discontinuo como el *exploración de trama*, ilustrado en la figura 7.4-1. El dispositivo de exploración, que produce un voltaje o corriente proporcional a la intensidad, comienza en el punto A y se mueve con tasas constantes pero desiguales en las direcciones horizontal y vertical, siguiendo la trayectoria AB. Así, si s_h y s_v son las velocidades de exploración horizontal y vertical, la salida del explorador es la *señal de video*

$$x(t) = I(s_h t, s_v t) \qquad [1]$$

ya que $h = s_h t$, y así sucesivamente. Al llegar al punto B, el punto explorador se regresa rápidamente a C (el retrazado horizontal) y procede de manera similar hasta el punto D, donde terminaría la exploración del cuadro.

Sin embargo, en la TV debe acomodarse el movimiento de la imagen, de modo que el punto se retraza verticalmente hasta E y sigue un patrón entrelazado que termina en F. El proceso se repite entonces comenzando de nuevo en A. Los dos conjuntos de líneas se denominan los *campos*; primero y segundo; juntos constituyen una imagen completa o *cuadro*. La frecuencia de cuadros es lo suficientemente rápida (de 25 a 30 por segundo) para crear la ilusión de movimiento continuo, mientras que la frecuencia de campos (el doble del de cuadros) hace el parpadeo imperceptible al ojo humano. Por tanto, la exploración entrelazada permite la menor frecuencia de repetición posible de la imagen sin parpadeo visible.

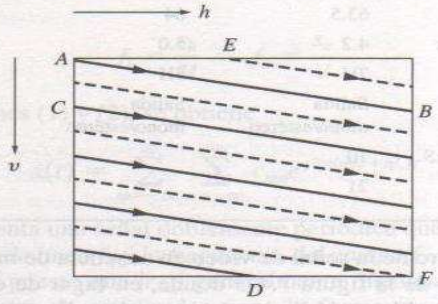


Figura 7.4-1 Exploración de trama con dos campos (la separación entre líneas está muy exagerada).

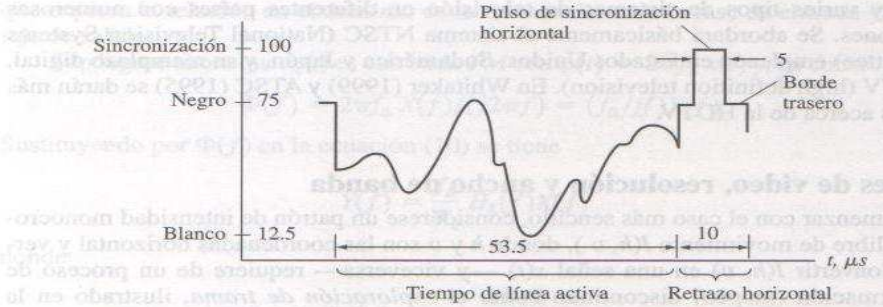


Figura 7.4-2 Señal de video para una línea completa (estándares NTSC).

A la señal de video se le hacen dos modificaciones después de la exploración: se insertan *pulsos de blanqueo* durante los intervalos de retrazo para eliminar las líneas de retrazado en el tubo receptor de imagen; y se añaden *pulsos de sincronización* sobre los pulsos de blanqueo para sincronizar los circuitos de barrido horizontal y vertical del receptor. La figura 7.4-2 muestra la forma de onda para una línea completa, con niveles de amplitud y duraciones correspondientes a los estándares NTSC. En la tabla 7.4-1 se dan otros parámetros junto con algunos valores comparables para el sistema europeo CCIR (Comité Consultivo Internacional de Radio) y el sistema de *alta definición* (HDTV).

Tabla 7.4-1 Parámetros de sistemas de televisión

	NTSC	CCIR	HDTV/USA
Proporción dimensional, horizontal/vertical	4/3	4/3	16/9
Total de líneas por cuadro	525	625	1125
Frecuencia del campo, Hz	60	50	60
LiFrecuencia de líneas, kHz	15.75	15.625	33.75
Tiempo de línea, μs	63.5	64	29.63
Ancho de banda de video, MHz	4.2	5.0	24.9
Distancia óptima de visión	7H	7H	3H
Sonido	Salida mono/estéreo	Salida mono/estéreo	Envolvente digital Dolby de 6 canales
Tiempo de retrazo horizontal, μS	10		3.7
Retrazo vertical, líneas/campo	21		45

El análisis del espectro de la señal de video en ausencia de movimiento es relativamente fácil con la ayuda de la figura 7.4-3 donde, en lugar de exploración con retrazado, la imagen se ha repetido periódicamente en ambas direcciones de manera que la trayectoria equivalente de exploración sea continua. Ahora cualquier función periódica de dos variables puede expandirse como una *serie de Fourier bidimensional* mediante

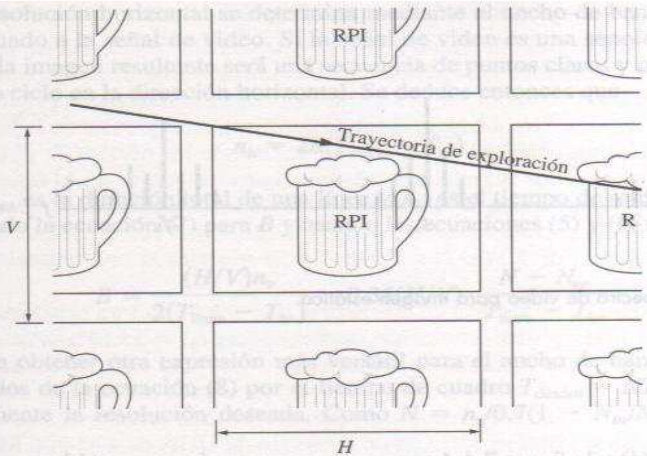


Figura 7.4-3 Imagen repetida periódicamente con trayectoria continua de exploración.

una extensión directa de la serie unidimensional. Para el caso en estudio con H y V los periodos horizontal y vertical (incluyendo el retrazo permisible), la intensidad de la imagen es

$$I(h, v) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \exp\left[j2\pi\left(\frac{mh}{H} + \frac{nv}{V}\right)\right] \quad [2]$$

donde

$$c_{mn} = \frac{1}{HV} \int_0^H \int_0^V I(h, v) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{mh}{H} + \frac{nv}{V}\right)\right] dh\, dv \quad [3]$$

Por tanto, haciendo

$$f_h = \frac{s_h}{H} \qquad f_v = \frac{s_v}{V}$$

Y usando las ecuaciones (1) y (2), se obtiene

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{j2\pi(mf_h + nf_v)t} \quad [4]$$

Esta expresión representa una señal doblemente periódica que contiene todas las armónicas de la *frecuencia de línea* f_h y la *frecuencia del campo* f_v, más sus sumas y diferencias. Como $f_h \gg f_v$ y puesto que $|c_{mn}|$ generalmente disminuye conforme el producto mn aumenta, el espectro de amplitudes tiene la forma mostrada en la figura 7.4-4, donde las líneas espectrales se agrupan alrededor de las armónicas de f_h y hay grandes brechas entre grupos.

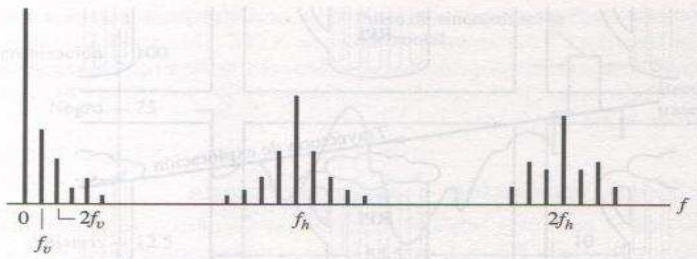


Figura 7.4-4 Espectro de video para imagen estática.

La ecuación (4) y la figura 7.4-4 son exactas para una imagen estática, como en los sistemas de facsímil. Cuando la imagen tiene movimiento, las líneas espectrales se unen en grupos continuos alrededor de las armónicas de f_h. Aun así, el espectro permanece en gran medida "vacío" en casi todas partes, una propiedad que se aprovecha en el desarrollo posterior de la TV a color. A pesar de las brechas en la figura 7.4-4, el espectro de video se extiende teóricamente en forma indefinida, de manera análoga a un espectro de líneas de FM. Por esa razón, la determinación del ancho de banda requerido para una señal de video involucra consideraciones adicionales.

Dos hechos básicos se interponen en el camino de una reproducción perfecta de la imagen: 1) sólo hay un número finito de líneas en la exploración de la trama, lo cual limita la claridad de la imagen o *resolución* en la dirección vertical y 2) la señal de video debe transmitirse con un ancho de banda finito, lo que limita la resolución horizontal. Cuantitativamente, la resolución se mide en función del máximo número de líneas discretas de la imagen que son distinguibles en cada dirección, digamos n_h y n_v. En otras palabras, la imagen más detallada que puede resolverse se toma como un patrón de un tablero de ajedrez con n_h columnas y n_v filas. Normalmente se desea la misma resolución horizontal y vertical en líneas por distancia unitaria, de modo que $n_h/H = n_v/V$ y

$$\frac{n_h}{n_v} = \frac{H}{V} \quad [5]$$

que se conoce como *proporción dimensional.*

Es evidente que la resolución vertical está relacionada con el número total N de líneas de la trama; en efecto, n_v es igual a N si todas las líneas de exploración están activas en la formación de la imagen (como en un facsímil pero no en TV) y la trama se alinea perfectamente con las filas de la imagen. Estudios experimentales muestran que una alineación arbitraria de la trama reduce la resolución efectiva por un factor de aproximadamente 70 por ciento, llamado *factor Kerr*, de manera que

$$n_v = 0.7(N - N_{vr}) \quad [6]$$

donde N_{vr} es el número de líneas de la trama pérdidas durante el retrazado vertical.

La resolución horizontal se determina mediante el ancho de banda B de la banda base asignado a la señal de video. Si la señal de video es una senoidal de frecuencia $f_{máx} = B$, la imagen resultante será una secuencia de puntos claros y oscuros separados por medio ciclo en la dirección horizontal. Se deduce entonces que

$$n_h = 2B(T_{\text{línea}} - T_{hr}) \qquad [7]$$

donde $T_{\text{línea}}$ es la duración total de una línea y T_{hr} es el tiempo de retrazado horizontal. Resolviendo la ecuación (7) para B y usando las ecuaciones (5) y (6) da

$$B = \frac{(H/V)n_v}{2(T_{\text{línea}} - T_{hr})} = 0.35(H/V)\ \frac{N - N_{vr}}{T_{\text{línea}} - T_{hr}} \qquad [8]$$

Es posible obtener otra expresión más versátil para el ancho de banda multiplicando ambos lados de la ecuación (8) por el tiempo de cuadro $T_{\text{cuadro}} = NT_{\text{línea}}$ y mostrando explícitamente la resolución deseada. Como $N = n_v/0.7(1 - N_{vr}/N)$, esto da como resultado

$$BT_{\text{cuadro}} = \frac{0.714n_p}{\left(1 - \frac{N_{vr}}{N}\right)\left(1 - \frac{T_{hr}}{T_{\text{línea}}}\right)} \qquad [9a]$$

donde

$$n_p = \frac{H}{V}n_v^2 = n_h n_v \qquad [9b]$$

El parámetro n_p representa el número de elementos de imagen o *pixeles*. La ecuación (9) resalta el hecho de que el requerimiento de ancho de banda (o tiempo de cuadro) aumenta en proporción al número de pixeles o como el cuadrado de la resolución vertical.

EJEMPLO 7.4-1

El sistema NTSC tiene $N = 525$ y $N_{vr} = 2 \times 21 = 42$ de modo que hay 483 líneas activas. El tiempo de línea es $T_{\text{línea}} = 1/f_h = 63.5\ \mu s$ y $T_{vr} = 10\ \mu s$, dejando un tiempo de línea activa de 53.5 μs. Por tanto, usando la ecuación (8) con $H/V = 4/3$, se obtiene el ancho de banda de video como

$$B = 0.35 \times \frac{4}{3} \times \frac{483}{53.5 \times 10^{-6}} \approx 4.2 \text{ MHz}$$

Este ancho de banda es lo suficientemente grande para reproducir los pulsos de sincronización de 5 μs con esquinas razonablemente cuadradas.

EJERCICIO 7.4-1

Los sistemas de facsímil no requieren de retrazado vertical y el tiempo de retrazado horizontal es despreciable. Calcular el tiempo T_{cuadro} necesario para la transmisión de facsímil de una página de periódico, 37 por 59 cm, con una resolucion de 40 líneas/cm usando un canal telefónico de voz con $B \approx 3.2$ kHz.

Transmisores y receptores monocromáticos

El gran ancho de banda y el contenido significativo de baja frecuencia de la señal de video, junto con la simplicidad deseada en la detección de envolvente, han conducido a la selección de la VSB + C (como se describió en la sección 4.4) para la radiodifusión de TV en Estados Unidos. No obstante, como la conformación precisa de la banda lateral residual se realiza más fácilmente en el receptor donde los niveles de potencia son pequeños, el espectro real de la señal modulada es como se indica en la figura 7.4-5*a*. La frecuencia de media potencia de la banda lateral superior está aproximadamente 4.2 MHz por encima de la portadora de video f_{cv}, mientras que la banda lateral inferior tiene un ancho de banda de 1 Mhz. La figura 7.4-5*b* muestra la conformación de frecuencia en el receptor.

La señal de audio es modulada en frecuencia por una portadora separada $f_{ca} = f_{cv} + f_a$, con $f_a = 4.5$ MHz y una desviación de frecuencia $f_\Delta = 25$ kHz. Por ello, asumiendo un ancho de banda de audio de 10 kHz, $D = 2.5$ y el audio modulado ocupa aproximadamente 80 kHz. Los canales de TV están separados por 6MHz, dejando una banda de guarda de 250 kHz. Las frecuencias portadoras se asignan en los intervalos de VHF de 54-72, 76-88 y 174-216 MHz , y en intervalo de UHF, de 470-806 MHz.

Las partes esenciales de un transmisor de TV se ilustran en el diagrama de bloques de la figura 7.4-6. El generador de sincronización controla la exploración de la trama y suministra los pulsos de blanqueo y sincronización para la señal de video. El restaurador de cd y el cortador blanco, trabajando en conjunto, aseguran que los niveles amplificados de la señal de video estén proporcionados. El modulador de video es del tipo AM de alto nivel con $\mu = 0.875$, y el amplificador de potencia separa la porción inferior de la banda lateral inferior.

La antena tiene una configuración de puente balanceado de manera que las salidas de los transmisores de audio y video sean radiadas por la misma antena sin interferir entre ellas. La potencia de audio transmitida es 50 a 70 por ciento de la potencia de video.

Como se indica en la figura 7.4-7, un receptor de TV es del tipo superheterodino. El amplificador IF principal tiene f_{IF} en la banda de 41 a 46 MHz y proporciona el conformador residual de la figura 7.4-5*b*. Obsérvese que la señal de audio modulada también pasa a

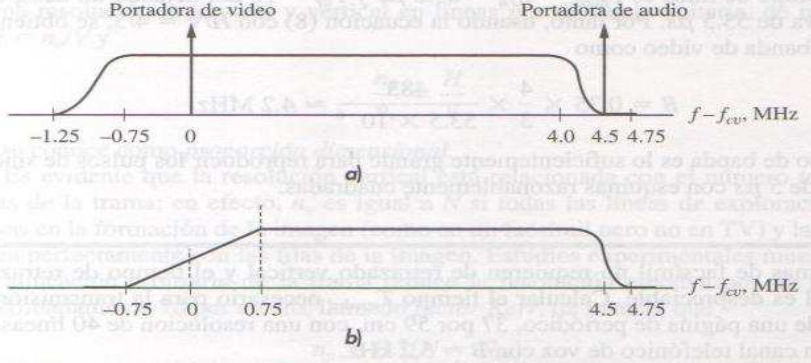


Figura 7.4-5 *a*) Espectro de TV transmitido; *b*) configuración VSB en el receptor.

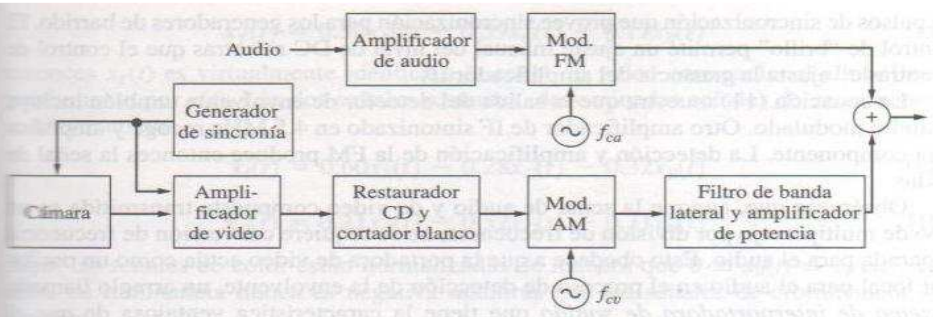


Figura 7.4-6 Transmisor de TV monocromática.

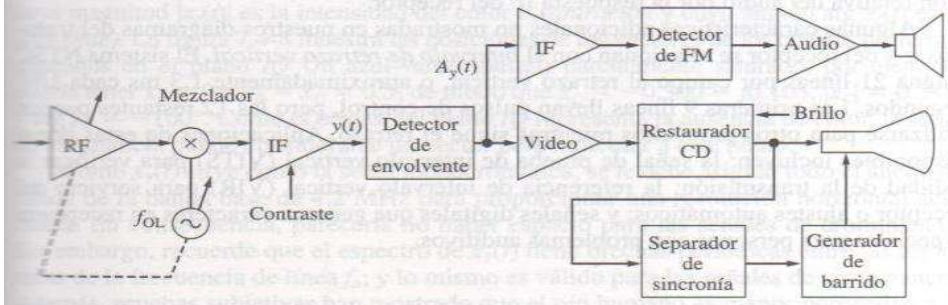


Figura 7.4-7 Receptor de TV monocromática.

través de este amplificador, pero con una ganancia sustancialmente menor. Entonces, usando la ecuación (11), sección 4.4, la señal total en la entrada al detector de envolvente es

$$y(t) = A_{cv}[1 + \mu x(t)] \cos \omega_{cv} t - A_{cv} \mu x_q(t) \operatorname{sen} \omega_{cv} t + A_{ca} \cos [(\omega_{cv} + \omega_a)t + \phi(t)] \quad [10]$$

donde $x(t)$ es la señal de video, $\phi(t)$ es el audio FM y $\omega_a = 2\pi f_a$. Puesto que $|\mu x_q(t)| \ll 1$ y $A_{ca} \ll A_{cv}$, la envolvente resultante es aproximadamente

$$A_y(t) = A_{cv}[1 + \mu x(t)] + A_{ca} \cos [\omega_a t + \phi(t)] \quad [11]$$

la cual da la señal en la salida del detector de envolvente.

El amplificador de video tiene un filtro pasabajas que remueve la componente de audio en $A_y(t)$ y también un restaurador de cd que fija electrónicamente los pulsos de blanqueo y por ello restaura el nivel de cd correcto en la señal de video. La señal de video amplificada y restaurada (nivel cd) se aplica al tubo de imagen y a un separador

de pulsos de sincronización que provee sincronización para los generadores de barrido. El control de "brillo" permite un ajuste manual del nivel de DC mientras que el control de "contraste" ajusta la ganancia del amplificador IF.

La ecuación (11) muestra que la salida del detector de envolvente también incluye el audio modulado. Otro amplificador de IF sintonizado en 4.5 MHz recoge y amplifica esta componente. La detección y amplificación de la FM produce entonces la señal de audio.

Obsérvese que, aunque la señal de audio y de video compuesta transmitida es un tipo de multiplexaje por división de frecuencia, no se requiere conversión de frecuencia separada para el audio. Esto obedece a que la portadora de video actúa como un oscilador local para el audio en el proceso de detección de la envolvente, un arreglo llamado *sistema de interportadora de sonido* que tiene la característica ventajosa de que el audio y el video siempre se sintonizan juntos. La operación exitosa depende del hecho de que la componente de video es grande comparada con la de audio en la entrada del detector de envolvente, como sea posible en el transmisor mediante el cortador blanco (lo que evita que la señal de video modulada se haga demasiado pequeña) y la atenuación relativa del audio por la respuesta IF del receptor.

Algunas características adicionales no mostradas en nuestros diagramas del transmisor y del receptor se relacionan con el *intervalo de retrazo vertical*. El sistema NTSC asigna 21 líneas por campo al retrazo vertical, o aproximadamente 1.3 ms cada 1/60 segundos. Las primeras 9 líneas llevan pulsos de control, pero las 12 restantes pueden utilizarse para otros propósitos mientras sigue el retraso. Aplicaciones de estas líneas disponibles incluyen: la señal de prueba de intervalo vertical (VITS) para verificar la calidad de la transmisión; la referencia de intervalo vertical (VIR) para servicio del receptor o ajustes automáticos; y señales digitales que generan caracteres en receptores especiales para personas con problemas auditivos.

EJERCICIO 7.4-2 Úsese un diagrama fasorial para deducir la ecuación (11) a partir de la ecuación (10).

Televisión a color

Cualquier color puede sintetizarse a partir de una mezcla de los tres colores aditivos primarios: rojo, verde y azul. En consecuencia, un enfoque general sobre la TV a color comprendería la transmisión directa de tres señales de video, digamos $x_R(t)$, $x_G(t)$ y $x_B(t)$, una por cada color primario. Pero, aparte del incremento en el ancho de banda requerido, este método no sería compatible con los sistemas monocromáticos existentes. Una señal de TV a color completamente compatible que se adapta al canal monocromático fue desarrollada en 1954, aprovechando ciertas características de la percepción humana del color. Aquí se bosquejan las características sobresalientes de ese sistema.

Para comenzar, las señales de los tres colores primarios se representan en forma única mediante cualesquiera otras tres señales que sean combinaciones lineales independientes de $x_R(t)$, $x_G(t)$ y $x_B(t)$. Y, mediante una selección apropiada de coeficientes, se hace que una de las combinaciones lineales sea la misma que la señal de intensidad o *luminancia* de la TV monocromática. En particular, resulta que

$$x_Y(t) = 0.30x_R(t) + 0.59x_G(t) + 0.11x_B(t) \quad [12a]$$

entonces $x_Y(t)$ es virtualmente idéntica a la señal de video convencional simbolizada previamente por $x(t)$. Las dos señales restantes, denominadas señales de *crominancia*, se toman como

$$x_I(t) = 0.60x_R(t) - 0.28x_G(t) - 0.32x_B(t) \quad [12b]$$

$$x_Q(t) = 0.21x_R(t) - 0.52x_G(t) + 0.31x_B(t) \quad [12c]$$

Aquí, las señales de color están normalizadas de manera que $0 \leq x_R(t) \leq 1$, etc., y la señal de luminancia nunca es negativa mientras que las señales de crominancia son bipolares.

La comprensión de las señales de crominancia mejora mediante la introducción del *vector del color*

$$x_C(t) = x_I(t) + jx_Q(t) \quad [13]$$

cuya magnitud $|x_c(t)|$ es la intensidad del color o *saturación* y cuyo ángulo arg $x_c(t)$ es el *tinte (hue)*. La figura 7.4-8 muestra las posiciones de los vectores de los colores primarios saturados en el plano *IQ* Un azul-verde (pastel) parcialmente saturado, por ejemplo, podría tener $x_R = 0$ y $x_B = x_G = 0.5$, de modo que $x_C = -0.300 - j0.105$, $|x_C| = 0.318$, y arg $x_C = -160°$. Como el origen del plano *IQ* representa la ausencia de color, la señal de luminancia puede considerarse un vector perpendicular a este plano.

Como $x_Y(t)$ sirve como la señal monocromática, se le debe asignar todo el ancho de banda de la banda base de 4.2 MHz para proporcionar una resolución horizontal adecuada. En consecuencia, parecería no haber espacio para las señales de crominancia. Sin embargo, recuerde que el espectro de $x_Y(t)$ tiene brechas periódicas entre las armónicas de la frecuencia de línea f_h; y lo mismo es válido para las señales de crominancia. Además, pruebas subjetivas han mostrado que el ojo humano es menos perceptivo a la resolución de crominancia que a la de luminancia, de modo que $x_I(t)$ y $x_Q(t)$ se restringen a aproximadamente 1.5 MHz y 0.5 MHz, respectivamente, sin una degradación visible significativa de la imagen a color. La combinación de estos factores permite el

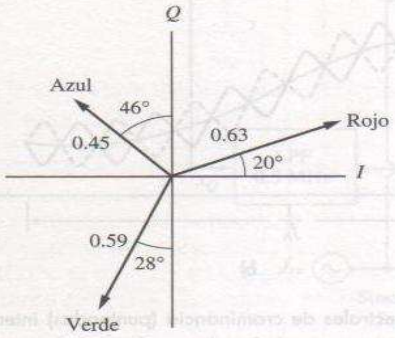


Figura 7.4-8 Vectores de los colores primarios saturados en el plano IQ.

multiplexaje de las señales de crominancia en forma intercalada en el espectro de banda base de la señal de luminancia.

Las señales de crominancia son multiplexadas en una *subportadora de color* cuya frecuencia cae exactamente en el centro entre las armónicas 227 y 228 de f_h, a saber

$$f_{cc} = \frac{455}{2} f_h \approx 3.6 \text{ MHz} \quad [14]$$

Por tanto, mediante extensión de la figura 7.4-3, las componentes de frecuencia de la luminancia y la crominancia se intercalan como se indica en la figura 7.4-9*a*, y hay 0.6 MHz entre f_{cc} y el extremo superior del canal de banda base. La modulación de la subportadora se describirá más adelante, después de examinar el intercalado de frecuencias y la compatibilidad.

¿Qué sucede cuando una señal de color se aplica a un tubo de imagen monocromático? Sorprendentemente, nada, desde la perspectiva de la persona que la ve. Cierto, la subportadora de color y sus bandas laterales producen variaciones senoidales por encima de la señal de luminancia. Pero como todas estas senoidales son exactamente un múltiplo impar de la mitad de la frecuencia de línea, se invierten en fase de línea a línea y de campo a campo, lo cual se ilustra en la figura 7.4-9*b*. Esto produce parpadeo en pequeñas áreas cuyo promedio en el tiempo y el espacio es igual al valor correcto de la luminancia y el televidente no lo nota.

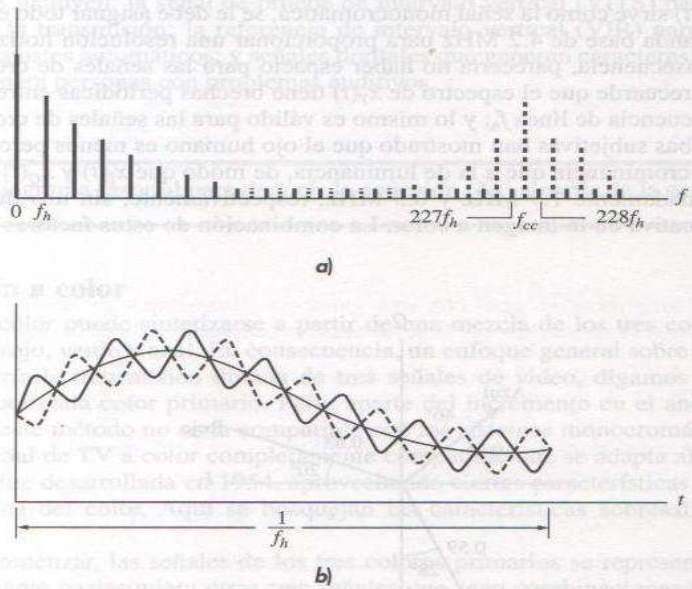


Figura 7.4-9 *a*) Líneas espectrales de crominancia (punteadas) intercaladas entre las líneas de luminancia; *b*) inversión de fase línea a línea de las variaciones de crominancia en la luminancia.

Mediante este efecto de promediar, el intercalamiento de frecuencias produce la señal de color compatible con un receptor monocromático no modificado. Asimismo, simplifica el diseño de receptores a color ya que, invirtiendo el argumento anterior, la señal de luminancia no interfiere visiblemente con las señales de crominancia. Hay un problema de interferencia menor ocasionado por la frecuencia diferencia $f_a - f_{cc}$ entre las subportadoras de audio y de color. Ese problema se resolvió cambiando ligeramente la frecuencia de línea a $f_h = f_d/286 = 15.73426$ kHz dando $f_a - f_{cc} = 4500 - 3579.545 = 920.455$ kHz $= (107/2)f_h$, la cual es una frecuencia "invisible" (como resultado de este cambio, la tasa del campo es efectivamente de 59.94 Hz y no de 60 Hz).

Una versión modificada del *multiplexaje de portadora en cuadratura* coloca ambas señales de crominancia sobre la subportadora de color. La figura 7.4-10 muestra cómo se combinan las señales de luminancia y crominancia para formar la señal de la banda base $x_b(t)$ en un transmisor a color. No se muestra la *corrección gamma* no lineal introducida en la salida de la cámara para compensar por la distorsión del brillo de los tubos de imagen a color.

Las señales de color con corrección de gamma son pasadas por una matriz primero para obtener $x_Y(t)$, $x_I(t)$ y $x_Q(t)$, de acuerdo con la ecuación (12). Después, las señales de crominancia se filtran a través de un pasabajas (con diferentes anchos de banda) y se aplican a los moduladores de subportadoras. El filtrado pasabanda subsiguiente produce modulación DSB convencional para el canal Q y VSB modificada para el canal I; por ejemplo, la DSB para frecuencias de la banda base de $x_I(t)$ por debajo de 0.5 MHz y LSSB para $0.5 < |f| < 1.5$ MHz. Esta última mantiene las señales de crominancia moduladas tan altas como sea posible en el espectro de la banda

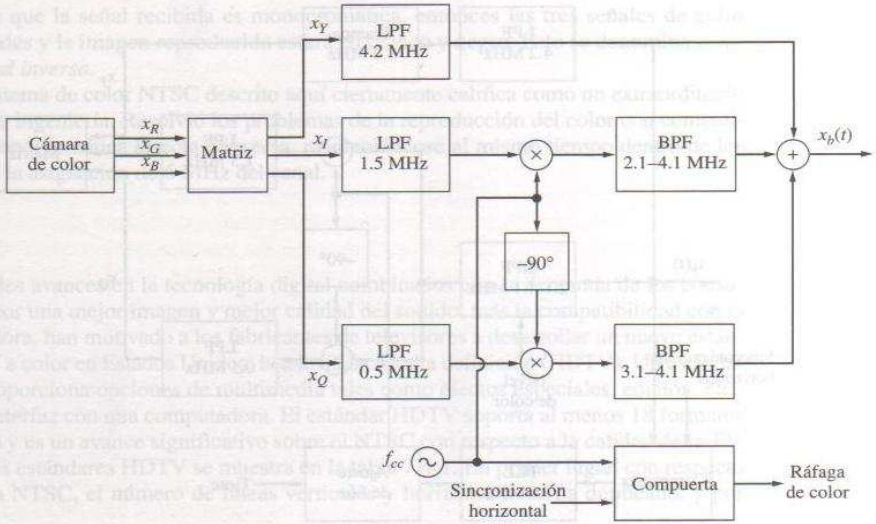


Figura 7.4-10 Sistema de modulación de la subportadora de color.

base, confinando así el parpadeo a pequeñas áreas y, al mismo tiempo, permitiendo suficiente ancho de banda para una resolución adecuada de $x_I(t)$. La supresión total de las bandas laterales no se usa debido al contenido significativo de bajas frecuencias en $x_I(t)$ y $x_Q(t)$.

Incluyendo $x_Y(t)$, la señal de banda base completa se convierte en

$$x_b(t) = x_Y(t) + x_Q(t) \operatorname{sen} \omega_{cc}t + x_I(t) \cos \omega_{cc}t + \hat{x}_{IH}(t) \operatorname{sen} \omega_{cc}t \qquad [15]$$

donde $\hat{x}_{IH}(t)$ es la transformada de Hilbert de la porción de alta frecuencia de $x_I(t)$ y explica las bandas laterales asimétricas. Esta señal de banda base reemplaza la señal de video monocromática en la figura 7.4-6. Además, una parte de 8 ciclos de la subportadora de color conocida como *ráfaga de color* se coloca en el "borde trasero" de los pulsos de blanqueo con el fin de sincronización.

El desmultiplexaje se lleva a cabo en un receptor de TV a color después del detector de envolvente, como se indica en la figura 7.4-11. Como la señal de luminancia está aquí en la banda base, no requiere de procesamiento adicional excepto por amplificación y una trampa o filtro de rechazo de 3.6 MHz para eliminar la componente principal del parpadeo; las bandas laterales de crominancia no necesitan eliminarse gracias al intercalado de frecuencias. Las señales de crominancia pasan a través de un amplificador pasabanda y se aplican a un par de detectores síncronos cuyo oscilador local es el OCV de un PLL sincronizado mediante comparación de fase con la ráfaga de color recibida. Se proveen controles manuales identificados como "nivel de color" (esto es,

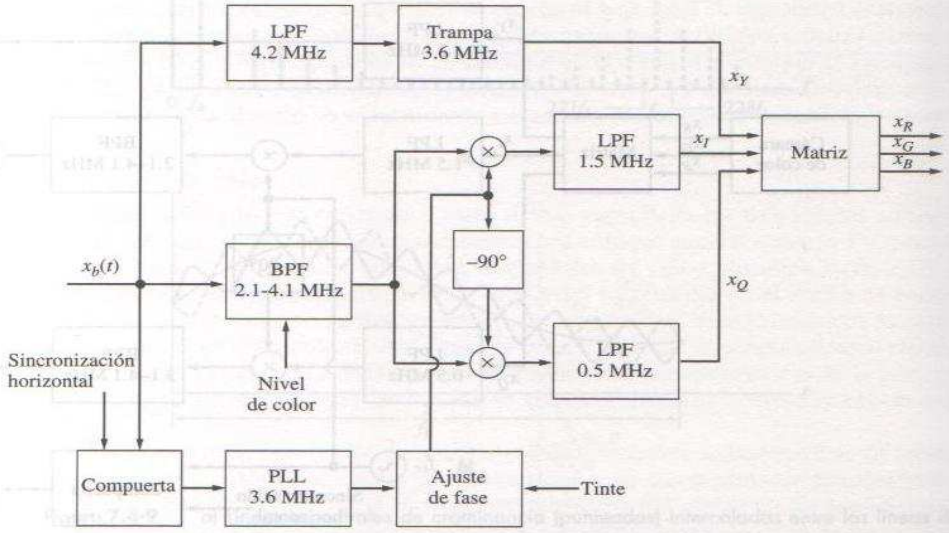


Figura 7.4-11 Sistema de demodulación a color.

saturación) y tinte para ajustar la ganancia de los amplificadores de crominancia y la fase del OCV; su efecto sobre la imagen se explica rápidamente en función del vector de color y la figura 7.4-8.

Asumiendo que hay una buena sincronización, de la ecuación (15) se deduce que las señales de los canales I y Q detectadas pero no filtradas son proporcionales a

$$v_I(t) = x_I(t) + 2x_{YH}(t)\cos\omega_{cc}t + x_I(t)\cos 2\omega_{cc}t + [x_Q(t) + \hat{x}_{IH}(t)]\,\text{sen}\,2\omega_{cc}t \quad [16a]$$

$$v_Q(t) = x_Q(t) + \hat{x}_{IH}(t) + 2x_{YH}(t)\,\text{sen}\,\omega_{cc}t + x_I(t)\,\text{sen}\,2\omega_{cc}t - [x_Q(t) + \hat{x}_{IH}(t)]\cos 2\omega_{cc}t \quad [16b]$$

donde $x_{YH}(t)$ representa las componentes de frecuencia de la luminancia en la banda de 2.1 a 4.1 MHz. Es evidente pues que un filtrado pasabajas separará los términos de doble frecuencia, mientras que los términos que involucran a $x_{YH}(t)$ son frecuencias "invisibles". Por otra parte, $\hat{x}_{IH}(t)$ en la ecuación (16b) no tiene componentes menores que 0.5 MHz, así que es rechazada por el LPF en el canal Q (un filtrado imperfecto aquí resulta en un efecto de molestia llamado diafonía de color en cuadratura). Por tanto, ignorando los términos de frecuencia invisible, $x_I(t)$ y $x_Q(t)$ se han recuperado y pueden matrizarse con $x_Y(t)$ para generar las señales de color para el tubo de imagen. Específicamente, mediante inversión de la ecuación (12),

$$\begin{aligned} x_R(t) &= x_Y(t) + 0.95x_I(t) + 0.62x_Q(t) \\ x_G(t) &= x_Y(t) - 0.28x_I(t) - 0.64x_Q(t) \\ x_B(t) &= x_Y(t) - 1.10x_I(t) + 1.70x_Q(t) \end{aligned} \quad [17]$$

Si sucede que la señal recibida es monocromática, entonces las tres señales de color serán iguales y la imagen reproducida estará en blanco y negro. Esto se denomina *compatibilidad inversa.*

El sistema de color NTSC descrito aquí ciertamente califica como un extraordinario logro de la ingeniería. Resolvió los problemas de la reproducción del color con compatibilidad monocromática directa e inversa, manteniéndose al mismo tiempo dentro de los límites de la asignación de 6 MHz del canal.

HDTV†

Los grandes avances en la tecnología digital combinados con la demanda de los consumidores por una mejor imagen y mejor calidad del sonido, más la compatibilidad con la computadora, han motivado a los fabricantes de televisores a desarrollar un nuevo estándar de TV a color en Estados Unidos: la televisión de alta definición (HDTV). Un estándar digital proporciona opciones de multimedia tales como efectos especiales, edición, etc., y mejor interfaz con una computadora. El estándar HDTV soporta al menos 18 formatos diferentes y es un avance significativo sobre el NTSC con respecto a la calidad de la TV. Uno de los estándares HDTV se muestra en la tabla 7.4-1. En primer lugar, con respecto al sistema NTSC, el número de líneas verticales y horizontales se ha duplicado, y por

† João O. P. diseñó esta sección.

ello la *resolución de la imagen* es cuatro veces mayor. En segundo, la *proporción dimensional* ha cambiado de 4/3 a 16/9. En tercero, como lo indican las figuras 7.4-12 y 7.4-13, la HDTV posee características mejoradas de *captura de escena* y de *ángulo de visión*. Por ejemplo, con H igual a la altura de la pantalla de TV con una distancia de visión de 10 pies (7H) en el sistema NTSC, el ángulo de visión es de aproximadamente 10 grados. Mientras que con el HDTV, la misma distancia de 10 pies (3H) produce un ángulo de visión de aproximadamente 20 grados.

La HDTV también ha adoptado el *sonido envolvente (surround)* en vez del monofónico o estéreo. Este sistema tiene seis canales: derecho, derecho envolvente, izquierdo, izquierdo envolvente, central y de *efecto de baja frecuencia (LFE)*. El canal LFE tiene un ancho de banda de sólo 120 Hz, proporcionando en efecto sólo 5.1 canales.

La HDTV alcanza una razón señal a ruido dada con 12 dB menos de potencia radiada que la NTSC-TV. Así que para la misma potencia del transmisor, la recepción que era marginal en las transmisiones de NTSV se mejorará sustancialmente con la HDTV.

Aunque no se hizo ningún intento de que las señales transmitidas de HDTV fueran compatibles con los receptores de TV NTSC existentes, para el año 2006 la FCC (Comisión Federal de Comunicaciones, USA) requiere que solamente se transmitan señales digitales, de las cuales las HDTV son un tipo. Por ello, para recibir transmisiones de TV,

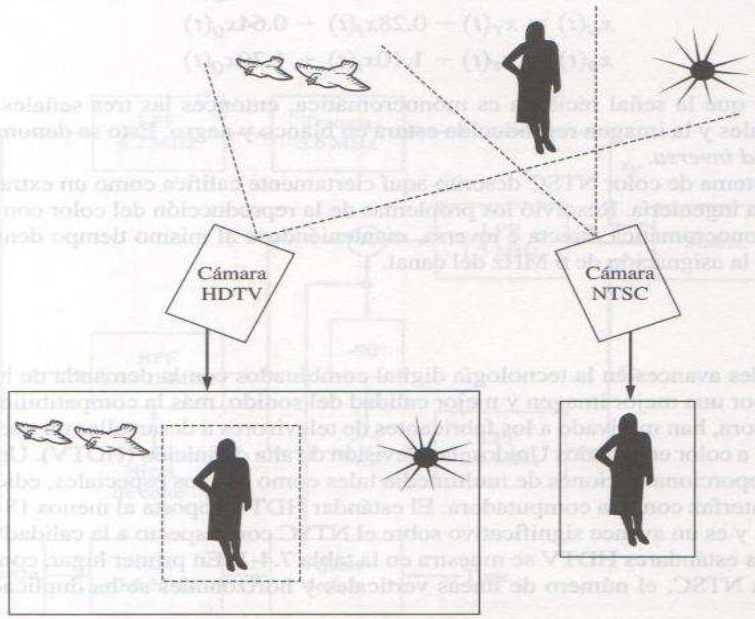


Figura 7.4-12 Capacidades de escena del sistema NTSC convencional y del HDTV.

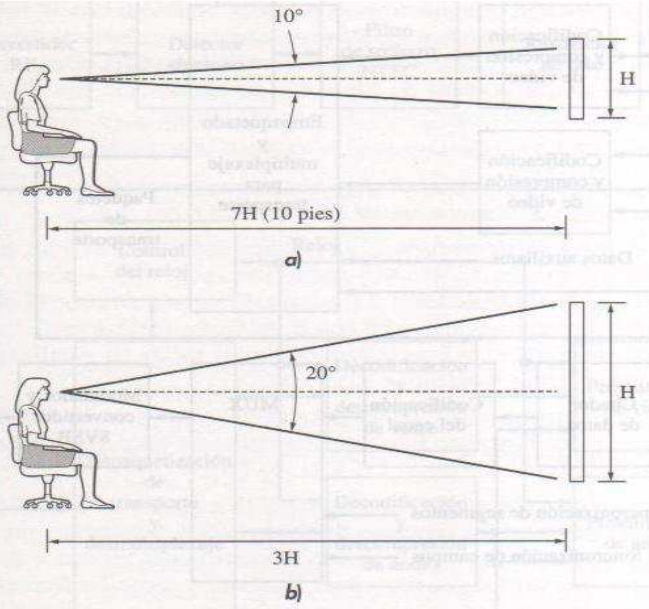


Figura 7.4-13 Ángulos de visión en función de la distancia. *a*) NTSC convencional; *b*) HDTV.

los aparatos de TV existentes tendrán que reemplazarse o modificarse mediante algún tipo de convertidor.

El sistema para codificar y transmitir señales de HDTV se muestra en la figura 7.4-14. El transmisor está formado por varias etapas. Primero, la señal de video de 24.9 MHz y las señales de audio correspondientes son *comprimidas*, de modo que se ajusten al ancho de banda de 6 MHz del canal asignado. Los datos de audio y video comprimidos se combinan entonces con *datos auxiliares*, que incluyen datos de control, letreros de ayuda, etc., usando un multiplexor. El multiplexor formatea entonces los datos en paquetes. Luego, los datos empaquetados se cifran para remover cualesquiera componentes discretos de frecuencia no deseados y se *codifican para el canal*. Durante la codificación del canal, los datos son codificados con símbolos de comprobación o de paridad usando la codificación *Reed-Solomon* para permitir la corrección de errores en el receptor. Los símbolos se intercalan para minimizar los efectos de *errores del tipo de ráfaga* donde el ruido en el canal provoca la corrupción de símbolos sucesivos. Finalmente, los símbolos se modulan con código Trellis (TCM). La TCM, que se discutirá en el capítulo 14, combina la codificación y la modulación y hace posible el incremento de la tasa de transmisión de símbolos sin un aumento en la probabilidad de error. Los datos codificados se combinan con señales de sincronización y

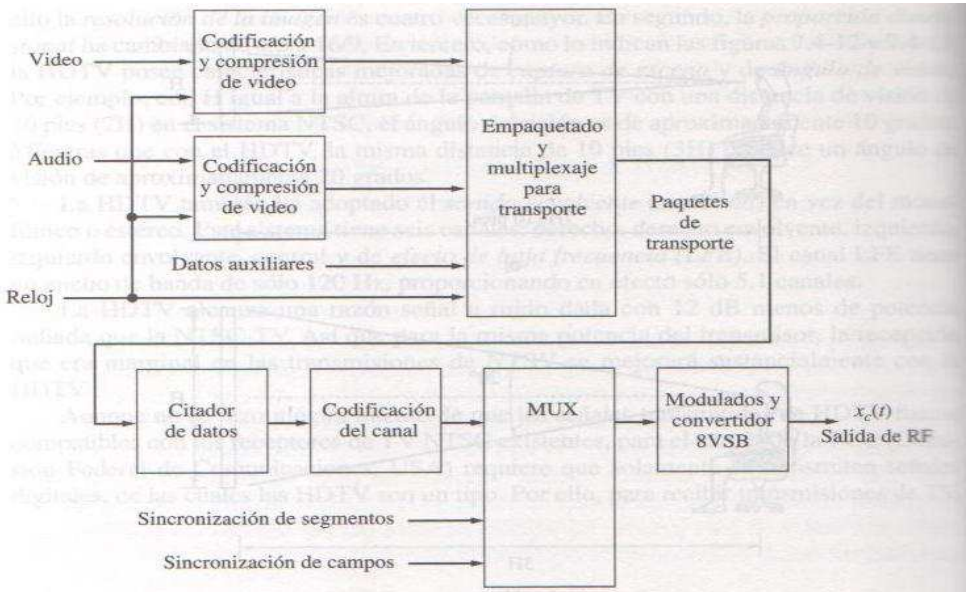


Figura 7.4-14 Diagrama de bloques de transmisor de HDTV.

entonces son modulados en 8VSB. La 8VSB es una técnica VSB donde un código de banda base de 8 niveles se modula VSB sobre una frecuencia portadora dada.

El receptor de HDTV mostrado en la figura 7.4-15 invierte el proceso anterior. Conforme los transmisores y receptores hacen la transición de la NTSC-TV a HDTV, se les permitirá transmitir ambas señales simultáneamente. Para superar interferencias potenciales, el receptor HDTV usa el *filtro de rechazo NTSC* para suprimir las señales de NTSC. Una etapa de compensación de canal/canceladora de imágenes fantasmas, no mostrada, realiza cancelación de imágenes múltiples y compensación del canal. El *rastreador de fase* minimiza los efectos del ruido de fase ocasionado por el PLL del sistema.

Cuando se digitaliza, la señal de video de 24.9 MHz tiene una tasa de bits de 1 Gbps, mientras que un canal de televisión de 6 MHz sólo es capaz de acomodar 20 Mbps. Por tanto, se requiere una relación de compresión de más de 50:1. La señal de video crudo obtenida por el proceso de exploración contiene redundancias espaciales y temporales significativas. Eso se aprovecha durante el proceso de compresión. Durante la transmisión de cada cuadro, sólo se transmiten aquellas partes de la escena que se mueven o cambian. El proceso de compresión específico es el *MPEG-2* (por Motion Picture Expert Group-2), el cual usa la *transformada de coseno discreta* (DCT). Véase González y Woods (1992) para mayor información sobre la DCT. Las señales MPEG-2 se conectan fácilmente mediante interfaces a computadoras para la capacidad de multimedia.

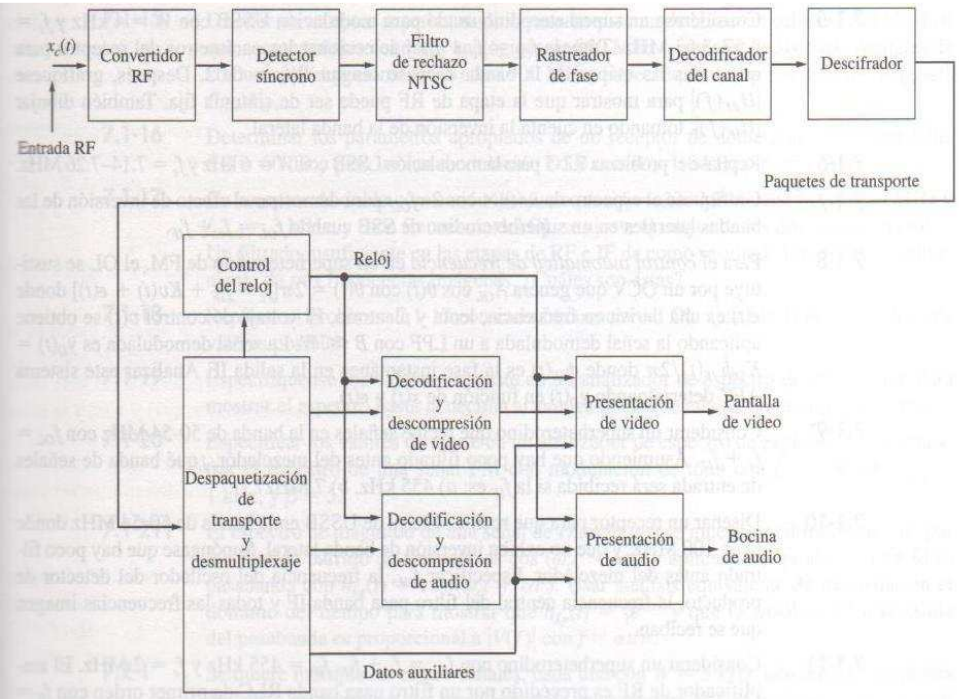


Figura 7.4-15 Diagrama de bloques de un receptor HDTV.

7.5 PROBLEMAS

7.1-1* Supóngase que se ha diseñado un superheterodino de AM comercial de modo que la frecuencia imagen cae siempre por encima de la banda de radiodifusión. Determinar el valor mínimo de f_{IF}, la banda correspondiente de f_{OL}, y las cotas para B_{RF}.

7.1-2 Supóngase que se ha diseñado un superheterodino de FM comercial de suerte que la frecuencia imagen cae siempre por debajo de la banda de radiodifusión. Determinar el valor mínimo de f_{IF}, la banda correspondiente de f_{OL}, y las cotas para B_{RF}.

7.1-3* Supóngase que un superheterodino de AM comercial tiene $f_{IF} = 455$ kHz y $f_{OL} = 1/2\pi\sqrt{LC}$, donde $L = 1$ μH y C es un capacitor variable para sintonización. Determínese la banda de valores de C cuando $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ y cuando $f_{LO} = f_c - f_{IF}$.

7.1-4 Supóngase que la etapa de RF de un superheterodino de AM comercial es un circuito sintonizado como el de la figura 4.1-7 con $L = 1$ μH y C variable para sintonización. Determinar la banda de valores de C y las cotas correspondientes para R.

7.1-5 Considérese un superheterodino usado para modulación USSB con $W = 4$ kHz y $f_c = 3.57$–3.63 MHz. Tómese $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ y seleccionar los parámetros del receptor para que todas las etapas de la banda de paso tengan $B/f_0 \approx 0.02$. Después, grafíquese $|H_{RF}(f)|$ para mostrar que la etapa de RF puede ser de sintonía fija. También dibujar $|H_{IF}(f)|$, tomando en cuenta la inversión de la banda lateral.

7.1-6 Repítase el problema 7.1-5 para la modulación LSSB con $W = 6$ kHz y $f_c = 7.14$–7.26 MHz.

7.1-7 Grafíquese el espectro de $x_c(t) \times \cos 2\pi f_{OL}t$ para demostrar el efecto de inversión de las bandas laterales en un superheterodino de SSB cuando $f_{OL} = f_c + f_{IF}$.

7.1-8 Para el *control automático de frecuencia* en un superheterodino de FM, el OL se sustituye por un OCV que genera $A_{OL}\cos\theta(t)$ con $\theta(t) = 2\pi[f_c - f_{IF} + Kv(t) + \epsilon(t)]$ donde $\epsilon(t)$ es una deriva en frecuencia, lenta y aleatoria. El voltaje de control $v(t)$ se obtiene aplicando la señal demodulada a un LPF con $B \ll W$. La señal demodulada es $y_D(t) = K_D\dot{\phi}_{IF}(t)/2\pi$ donde $\phi_{IF}(t)$ es la fase instantánea en la salida IF. Analizar este sistema AFC determinando $y_D(t)$ en función de $x(t)$ y $\epsilon(t)$.

7.1-9* Considerar un superheterodino que recibe señales en la banda de 50-54 MHz con $f_{OL} = f_c + f_{IF}$. Asumiendo que hay poco filtrado antes del mezclador, ¿qué banda de señales de entrada será recibida si la f_{IF} es: *a*) 455 kHz, *b*) 7 MHz?

7.1-10 Diseñar un receptor para que reciba señales de USSB en la banda de 50-54 MHz donde $f_{IF} = 100$ MHz, y que no exhiba inversión de banda lateral. Supóngase que hay poco filtrado antes del mezclador. Especificar f_{OL}, la frecuencia del oscilador del detector de producto, la frecuencia central del filtro pasa banda IF y todas las frecuencias imagen que se reciban.

7.1-11 Considerar un superheterodino con $f_{OL} = f_c + f_{IF}$, $f_{IF} = 455$ kHz y $f_c = 2$ MHz. El amplificador de RF es precedido por un filtro pasa banda RLC de primer orden con $f_0 = 2$ MHz y $B = 0.5$ MHz. Supóngase que el BPF-IF es casi ideal y que el mezclador tiene ganancia unitaria. ¿Cuál es la relación de rechazo mínima de frecuencias falsas en dB?

7.1-12* Supóngase que el receptor en el problema 7.1-11 tiene un OL con una segunda armónica cuyo nivel de voltaje es la mitad que el de la componente fundamental. *a*) ¿Qué frecuencias de entrada serán aceptadas y a qué nivel de potencia en dB en comparación con la entrada correcta? *b*) Discútanse todas las formas para minimizar estas entradas interferentes.

7.1-13 Considerar un superheterodino que recibe señales en la banda de 7.0 a 8.0 MHz con $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ y $f_{IF} = 455$ kHz. El amplificador de RF del receptor tiene una banda de paso de 2 MHz, su BPF-IF es casi ideal, y tiene un ancho de banda de 3 kHz. Diseñar un convertidor de frecuencias que tenga una frecuencia del OL fija, de manera que permita la recepción de señales de 50.0 a 51.0 MHz. Supóngase que el amplificador de RF del convertidor es de banda relativamente ancha. *a*) Si se asume que la frecuencia entrante es $f_c = 50$ MHz, ¿a qué otras frecuencias espurias responderá el receptor? *b*) Describir cómo minimizar estas respuestas espurias.

7.1-14* ¿Cuál es el comportamiento de rechazo de imagen de un receptor superheterodino de una sola conversión que recibe señales en la banda de 50-54 MHz, $f_{OL} > f_c$, y tiene un amplificador de RF que incluye un BPF-RLC de frecuencia fija con $B = 4$ MHz con *a*) $f_{IF} = 20$ MHz, *b*) $f_{IF} = 100$ MHz?

7.1-15 Diseñar un receptor superheterodino para un sistema de telefonía celular de modo dual que acepte señales celulares analógicas de 850 MHz o señales de sistemas digitales de comunicación personal (PCS) de 1900 MHz. Especifíquense las frecuencias imágenes F_{OL}, F_{IF},.

7.1-16 Determinar los parámetros apropiados de un receptor de doble conversión que tiene $RR = 60$ dB y para uso en modulación DSB con $W = 10$ kHz y $f_c = 4$ MHz.

7.1-17 Un receptor de doble conversión diseñado para $f_c = 300$ MHz tiene $f_{IF-1} = 30$ MHz y $f_{IF-2} = 3$ MHz, y cada frecuencia del OL se ajusta al mayor de los dos valores posibles. Un filtrado insuficiente en las etapas de RF e IF da como resultado interferencia proveniente de *tres* frecuencias imágenes. ¿Cuáles son éstas?

7.1-18 Repítase el problema 7.1-17 con cada frecuencia del OL ajustada al menor de los dos valores posibles.

7.1-19 Especifíquense los valores de ajuste en un analizador de espectro de exploración para mostrar el espectro hasta la décima armónica de una señal con un periodo de 50 ms.

7.1-20 Especificar los valores de ajuste en un analizador de espectro de exploración para mostrar el espectro de una señal FM con modulación de tono con $f_c = 100$ kHz, $f_m = 1$ kHz, y $\beta = 5$.

7.1-21‡ El espectro de magnitud de una señal de *energía* $v(t)$ se muestra multiplicando $v(t)$ por la señal de barrido de frecuencias $\cos(\omega_c t - \alpha t^2)$ y aplicando el producto a un filtro pasabanda con $h_{bp}(t) = \cos(\omega_c t + \alpha t^2)$. Usar análisis equivalente de pasabajas en el dominio del tiempo para mostrar que $h_{\ell p}(t) = \frac{1}{2}e^{j\alpha t^2}$ y que la envolvente de la salida del pasabanda es proporcional a $|V(f)|$ con $f = \alpha t/\pi$.

7.2-1 Se quiere multiplexar cuatro señales, cada una con $W = 3$ kHz, con bandas de guarda de 1 kHz entre canales. La modulación de subportadora es USSB, excepto por el canal inferior que no está modulado y la modulación de la portadora es de AM. Grafíquese el espectro de la señal de banda base y la señal transmitida y calcular el ancho de banda de transmisión.

7.2-2 Repítase el problema 7.2-1 con modulación de AM de la subportadora.

7.2-3 Sea f_i una portadora arbitraria en una señal FDM. Úsense gráficos de traslación de frecuencia para mostrar que los BPF de la figura 7.2-2 no son necesarios si la modulación de la subportadora es DSB y el detector incluye un LPF. Después, demuéstrese que los BPF son necesarios, en general, para modulación SSB de la subportadora.

7.2-4* Se quiere multiplexar diez señales con ancho de banda W usando modulación SSB de la subportadora y una banda de guarda B_g entre canales. Los BPF en el receptor tienen $|H(f)| = \exp\{-[1.2(f - f_0)/W]^2\}$, donde f_0 es igual a la frecuencia central para cada señal subportadora. Determínese B_g de modo que la respuesta de canales adyacentes satisfaga la condición $|H(f)| \leq 0.1$. Calcular después el ancho de banda de transmisión resultante de la señal FDM.

7.2-5 Supóngase que los canales de voz en una señal de grupos tienen $B_g = 1$ kHz y están separados en el receptor usando BPF con $|H(f)| = \{1 + [2(f - f_0)/B]^{2n}\}^{-1/2}$. Grafíquense cuidadosamente tres canales adyacentes en el espectro de grupo, tomando en cuenta el hecho de que una señal de voz de la banda base tiene un contenido despreciable fuera de $200 < |f| < 3200$ Hz. Úsese el gráfico para encontrar valores para B, f_0, y n de modo que $|H(f)| \leq 0.1$ fuera de la pasabanda deseada.

7.2-6 Algunos sistemas de telemetría FDM emplean modulación de FM de la subportadora con *ancho de banda proporcional* cuando las señales que deben multiplexarse tienen anchos de banda diferentes. Todas las señales subportadoras tienen la misma relación de desviación, pero la frecuencia de la i-ésima subportadora y el ancho de banda del mensaje están relacionados por $f_i = W_i/\alpha$ donde α es una constante. *a*) Demuéstrese que el ancho de banda B_i de la señal subportadora es proporcional a f_i, y obténgase una expresión para f_{i+1} en función de f_i para proporcionar una banda de guarda B_g entre canales. *b*) Calcular las tres frecuencias subportadoras siguientes cuando $f_1 = 2$ kHz, $B_1 = 800$ Hz y $B_g = 400$ Hz.

7.2-7 Determinar las señales de salida del sistema de portadora en cuadratura en la figura 7.2-6 cuando el oscilador local del receptor tiene un error de fase ϕ'.

7.2-8 En un sistema propuesto para *multiplexaje cuadrafónico* de FM, la señal de banda base en la figura 7.2-4 se modifica de la forma siguiente: la señal no modulada es $x_0(t) = L_F + L_R + R_F + R_R$ (para compatibilidad monofónica), la subportadora de 38 kHz tiene multiplexaje de portadora en cuadratura con señales moduladoras $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y la señal SCA es reemplazada por una subportadora de 76 kHz con modulación DSB por $x_3(t) = L_F - L_R + R_F - R_R$. ¿Cuáles deben ser las componentes de $x_1(t)$ para tener compatibilidad estereofónica? Considerar ahora a $x_0(t) \pm x_1(t) \pm x_3(t)$ para determinar las componentes de $x_2(t)$. Dibujar un diagrama de bloques del transmisor y el receptor cuadrafónico correspondientes.

7.2-9‡ Supóngase que el canal de transmisión en la figura 7.2-6 tiene distorsión lineal representada por la función de transferencia $H_C(f)$. Determinar el espectro resultante en la salida inferior y muestre que la condición para no diafonía es $H_C(f - f_c) = H_C(f + f_c)$ para $|f| \leq W$. Si se cumple esta condición, ¿qué se debe hacer para recuperar $x_1(t)$?

7.2-10* Se desea transmitir veinticuatro señales de voz usando PAM multiplexada con un pulso marcador para sincronización de encuadres. La frecuencia de muestreo es de 8 kHz y la señal TDM tiene un ciclo de trabajo de 50 por ciento. Calcular la tasa de señalización, la duración del pulso y el mínimo ancho de banda de transmisión.

7.2-11 Repítase el problema 7.2-10 con una frecuencia de muestreo de 6 kHz y un ciclo de trabajo de 30 por ciento.

7.2-12 Se muestrean veinte señales, cada una con $W = 4$ kHz, con una frecuencia que permite una banda de guarda de 2 kHz para filtrado de reconstrucción. Las muestras multiplexadas se transmiten en una portadora de OC. Calcular el ancho de banda de transmisión requerido cuando la modulación es: *a*) PAM/AM con ciclo de trabajo de 25 por ciento; *b*) PAM/SSB con filtrado de banda base.

7.2-13* Se muestrean diez señales, cada una con $W = 2$ kHz, con una frecuencia que permite una banda de guarda de 1 kHz para filtrado de reconstrucción. Las muestras multiplexadas se transmiten en una portadora de OC. Calcular el ancho de banda de transmisión requerido cuando la modulación es: *a*) PPM/AM con ciclo de trabajo de 20 por ciento; *b*) PAM/FM con filtrado de banda base y $f_\Delta = 75$ kHz.

7.2-14 Dado un multiplexor principal de 6 canales con $f_s = 8$ kHz, diseñar un sistema de telemetría similar al de la figura 7.2-11 (incluido un marcador) que acomode seis señales de entrada con los anchos de banda siguientes: 8.0, 3.5, 2.0, 1.8, 1.5 y 1.2 kHz. Asegurarse de que las muestras sucesivas de cada señal de entrada estén equiespaciadas en el tiempo. Calcúlese el ancho de banda de la banda base resultante y compárese con el mínimo ancho de banda de transmisión para un sistema FDM-SSB.

7.2-15 Repítase el problema 7.2-14 para siete señales de entrada con los siguientes anchos de banda: 12.0, 4.0, 1.0, 0.9, 0.8, 0.5 y 0.3 kHz.

7.2-16 Repítase el problema 7.2-14 para ocho señales de entrada con los siguientes anchos de banda: 12.0, 3.5, 2.0, 0.5, 0.4, 0.3, 0.2 y 0.1 kHz.

7.2-17 Calcular el ancho de banda requerido de manera que la diafonía no exceda -40 dB cuando se transmiten 25 canales de voz a través de PPM-TDM con $f_s = 8$ kHz y $t_0 = \tau = 0.2(T_s/M)$.

7.2-18* Determínese el máximo número de señales de voz que pueden transmitirse vía TDM-PPM con $f_s = 8$ kHz y $t_0 = \tau = 0.25(T_s/M)$ cuando el canal tiene $B = 500$ kHz y la diafonía se debe mantener por debajo de -30 dB.

7.2-19 La diafonía también ocurre cuando un sistema de transmisión tiene una *respuesta de baja frecuencia* inadecuada, usualmente como resultado de acoplamiento por transformadores o por capacitores de bloqueo. Demuéstrese este efecto dibujando la respuesta al pulso de un filtro pasa altas cuya respuesta al escalón es $g(t) = \exp(-2\pi f_\ell t)\, u(t)$. Considerar los casos extremos $f_\ell \tau \ll 1$ y $f_\ell \tau \gg 1$.

7.3-1 Para una implementación de la comparación de fases digital, el circuito de conmutación de la figura 7.3-1*b* tiene un *flip-flop* de *set-reset* cuya salida se convierte en $s(t) = +A$ después de ir hacia un cruce de cero positivo de $x_c(t)$ y $s(t) = -A$ después de salir de un cruce de cero positivo de $v(t)$. *a*) Tome $x_c(t) = \cos \omega_c t$ y $v(t) = \cos(\omega_c t - \phi_v)$ y dibuje un periodo de $s(t)$ para $\phi_v = 45$, 135, 180, 225 y 315°. *b*) Ahora grafíquese y contra $\epsilon = \phi_v - 180°$ asumiendo que $y(t) = \langle s(t) \rangle$. Observar que esta realización requiere una diferencia de fase de $\pm 180°$ entre las entradas para $y = 0$.

7.3-2 Repítase la parte *a*) del problema 7.3-1 para un comparador de fase digital con un conmutador controlado por $v(t)$ de modo que su salida sea $s(t) = A \operatorname{sgn} x_c(t)$ cuando $v(t) > 0$ y $s(t) = 0$ cuando $v(t) < 0$. Grafíquese ahora y contra $\epsilon = \phi_v - 90°$, asumiendo que $y(t) = \langle s(t) \rangle$.

7.3-3 Considerar un PLL en régimen permanente con $\epsilon_{ss} \ll 1$ para $t < 0$. La frecuencia de entrada sufre un cambio en escalón en $t = 0$, de manera que $\phi(t) = 2\pi f_1 t$ para $t > 0$. Resolver la ecuación (5) para hallar y dibujar $\epsilon(t)$, asumiendo que $K \gg |\Delta f + f_1|$.

7.3-4 Explicar por qué el sistema con PLL de Costas de la figura 7.3-4 no se usa para detección síncrona de SSB o VSB.

7.3-5* Considerar un PLL en condiciones de enganche en régimen permanente. Si la entrada externa es $x_c(t) = A_c \cos(\omega_c t + \phi_0)$, entonces la señal realimentada al comparador de fase debe ser proporcional a $\cos(\omega_c t + \phi_0 + 90° - \epsilon_{ss})$. Use esta propiedad para hallar la salida del OCV en la figura 7.3-5 cuando $\epsilon_{ss} \neq 0$.

7.3-6 Úsese la propiedad enunciada en el problema 7.3-5 para hallar la salida del OCV en la figura 7.3-6 cuando $\epsilon_{ss} \neq 0$.

7.3-7 Modificar el receptor FM estéreo de la figura 7.2-5 a fin de incorporar un PLL con $f_v \approx 38$ kHz para la subportadora. Inclúyase también un indicador de estéreo de cd.

7.3-8* Dados un oscilador maestro de 100 kHz y dos contadores ajustables que dividen entre n con $n = 1$ hasta 10, diseñar un sistema que sintetice cualquier frecuencia desde 1 kHz hasta 99 kHz en pasos de 1 kHz. Especificar la frecuencia de corrida libre nominal de cada OCV.

7.3-9 Con respecto a la tabla 7.1-1, diseñar un sintetizador de frecuencia para generar $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ para un radio de FM. Supóngase que tiene a su disposición un oscilador maestro de 120.0 MHz y contadores ajustables que dividen entre n con $n = 1$ hasta 1000.

7.3-10 Con respecto a la tabla 7.1-1, diseñar un sintetizador de frecuencia para generar $f_{OL} = f_c + f_{IF}$ para un radio de AM. Supóngase que tiene a su disposición un oscilador maestro de 2105 kHz y contadores ajustables que dividen entre n con $n = 1$ hasta 1000.

7.3-11 El PLL linealizado en la figura 7.3-8 se transforma en un demodulador de *fase* si se añade un integrador ideal para obtener

$$z(t) = \int^t y(\lambda)\, d\lambda$$

Determinar $Z(f)/X(f)$ cuando la entrada es una señal de PM. Compararla con la ecuación (11).

7.3-12* Considérese el modelo de PLL de la figura 7.3-8*c*, donde $E(f) = \Phi(f) - \Phi_v(f)$. *a*) Determinar $E(f)/\Phi(f)$ y dedúzcase la ecuación (10) a partir de allí. *b*) Demuéstrese que si la entrada es una señal FM, entonces $E(f) = (f_\Delta/K)H_\epsilon(f)X(f)$ con $H_\epsilon(f) = 1/[H(f) + j(f/K)]$.

7.3-13 Supóngase que un detector FM es un PLL linealizado de primer orden con $H(f) = 1$ y que la señal de entrada es modulada por $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ donde $A_m \leq 1$ y $0 \leq f_m \leq W$. *a*) Use la relación del problema 7.3-12*b* para hallar la amplitud en régimen permanente de $\epsilon(t)$. *b*) Puesto que la operación lineal requiere que $|\epsilon(t)| \leq 0.5$ radianes, de modo que $\epsilon \approx \epsilon$, demuéstrese que la ganancia de lazo mínima es $K = 2f_\Delta$.

7.3-14‡ Supóngase que un detector de FM es un PLL de *segundo orden* con ganancia de lazo K y $H(f) = 1 + K/j2f$. Supóngase que la señal de entrada es modulada por $x(t) = A_m \cos 2\pi f_m t$ donde $A_m \leq 1$ y $0 \leq f_m \leq W$. *a*) Úsese la relación en el problema 7.3-12*b* para demostrar que la amplitud en régimen permanente de $\epsilon(t)$ es máxima cuando $f_m = K/\sqrt{2}$ si $K/\sqrt{2} \leq W$. *b*) Supóngase ahora que $K/\sqrt{2} > W$ y $f_\Delta > W$. Puesto que la operación lineal requiere que $|\epsilon(t)| < 0.5$ radianes, de modo que sen $\epsilon \approx \epsilon$, demuéstrese que la ganancia de lazo mínima es $K \approx 2\sqrt{f_\Delta W}$.

7.3-15‡ Considerar el PLL de segundo orden en el problema 7.3-14. *a*) Demuéstrese que $H_L(f)$ se convierte en un LPF de segundo orden con $|H_L|$ máxima en $f \approx 0.556K$ y ancho de banda de 3 dB $B \approx 1.14K$. *b*) Úsese las condiciones de la ganancia del lazo en los problemas 7.3-13 y 7.3-14 para comparar los anchos de banda de 3 dB mínimos de un detector FM con PLL de primer orden y uno de segundo orden cuando $f_\Delta/W = 2$, 5, y 10.

7.4-1 Explicar las siguientes afirmaciones: *a*) Un cuadro de TV debe tener un número *impar* de líneas. *b*) La forma de onda que se usa para generar la trayectoria de rastreo debe ser una *de diente de sierra*, y no una senoidal o una triangular.

7.4-2 Considerar un explorador de imagen con pendiente y tiempo de retrazado muy pequeños. Dibújese la señal de video y su espectro, sin usar la ecuación (4), cuando la imagen está formada por: *a*) barras verticales alternantes en blanco y negro de anchura $H/4$; *b*) barras horizontales alternantes en blanco y negro de altura $V/4$.

7.4-3 Considerar una imagen que es completamente negra ($I = 0$) excepto por un rectángulo blanco en el centro ($I = 1.0$) de anchura αH y altura βV. *a*) Demuéstrese que $|c_{mn}| = \alpha\beta|\ \text{sinc}\ \alpha m\ \text{sinc}\ \beta n|$. *b*) Dibújese el espectro de líneas resultante cuando $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/4$ y $f_v = f_h/100$.

7.4-4* Calcúlese el número de pixeles y el requerimiento de ancho de banda de video para un sistema de TV de baja resolución con una imagen cuadrada, 230 líneas activas y tiempo de línea activa igual a 100 μs.

7.4-5 Calcular el número de pixeles y el requerimiento de ancho de banda de video para el sistema de HDTV de la tabla 7.4-1 si $N_{vr} \ll N$ y $T_{hr} = 0.2T_{\text{línea}}$.

7.4-6* Calcular el número de pixeles y el requerimiento de ancho de banda de video para el sistema de CCIR de la tabla 7.4-1 si $N_{vr} = 48$ y $T_{hr} = 10\ \mu$s.

7.4-7 El *efecto de apertura* horizontal surge cuando el proceso de exploración en una cámara de TV produce la salida

$$\tilde{x}(t) = \int_{t-\tau}^{t} x(\lambda)\, d\lambda$$

donde $x(t)$ es la señal de video deseada $\tau \ll T_{\text{línea}}$. *a*) Descríbase la imagen de TV resultante. *b*) Determinar un compensador que mejore la calidad de la imagen.

7.4-8 Descríbase lo que le sucede a una imagen de TV a color cuando: *a*) la ganancia del amplificador de crominancia es demasiado alta o demasiado baja; *b*) el ajuste de fase de la subportadora de color está errado por ± 90 o $180°$.

7.4-9 Realizar las operaciones que permiten pasar de la ecuación (15) a la ecuación (16).

7.4-10 Obténganse expresiones equivalentes a las ecuaciones (15) y (16) cuando todos los filtros en canal x_Q (en el transmisor y el receptor) son iguales a los del canal x_I. Comentar los resultados.